Erklärung

aller

in einaxigen Krystallplatten zwischen geradlinig polarisirtem Lichte wahrnehmbaren

Interferenz-Erscheinungen

in mathematischer Form mitgetheilt

von

Dr. G. S. Ohm.

Mit 1 Tafel.

Zweite Hälfte,

worin die in übereinander liegenden Krystallplatten entstehenden Erscheinungen zur Sprache kommen.

Der Classe übergeben am 22. November 1852.

Aus den Abhandlungen der k. bayr. Akademie d. W. II. Cl. VII. Bd. II. Abth.

München 1853.

Verlag der k. Akademie,

in Commission bei G. Franz.

Erklärung
aller
in einaxigen Krystallplatten zwischen geradlinig polarisirtem Lichte
wahrnehmbaren

Interferenz-Erscheinungen
in mathematischer Form mitgetheilt
von

Dr. G. S. Ohm.

Vorerinnerung.

Die erste Hälfte dieser Abhandlung hob mit einer Art von Beweisführung an, dass das von mir wahrgenommene System von concentrischen Ellipsen, dessen Mittelpunkt mit der Mitte des Gesichtsfeldes zusammenfällt, bis dahin noch nicht erkannt worden sei. Unmittelbar nach der Beendigung des Drucks von jener ersten Hälfte erhielt ich die Kunde, dass meine Beweisführung fehlerhaft ist, und ich beeile mich, in Folge dessen, die Priorität von jener Entdeckung demjenigen zurück zu stellen, der sie bereits ein Lustrum vor mir gemacht hatte. In dem 1842 herausgekommenen Ergänzungsband zu Poggendorffs Annalen steht pag. 529 unter dem Titel „Analyse der isochromatischen und der Interferenz-Erscheinungen in combinirten einaxigen Krystallen“ ein Auszug aus einer im norwegischen Magazin for Naturvidenshaberne Bd. II. ausführlich veröffentlichten Abhandlung, der von derem Verfasser, Herrn Chr. Langberg in Christiania, selber besorgt worden ist. Dieser Auszug enthält neben einem grossen Reichthum von andern neuen Resul-

taten namentlich auch jenes Ellipsensystem (pag. 541 ganz unten) schon vollkommen bestimmt angezeigt. Ich weiss nicht, soll ich es Unglück oder Glück nennen, dass mir diese höchst beachtenswerthe Schrift so ganz und gar entgangen ist. Allerdings wären, hätte ich früher von ihr Kenntniss erhalten, meine gegenwärtigen Untersuchungen, welche gerade durch jenes Ellipsensystem veranlasst wurden, ohne Zweifel unterblieben, wodurch mir eine nicht geringe Mühe erspart worden wäre; dann aber wären andere, kaum minder wichtigere Dinge im Schoos der Zeit verborgen geblieben. Es hat sich mir bei dieser Gelegenheit der tiefe Sinn des Sprüchworts „der Mensch denkt und Gott lenkt" auf's Neue bewährt. Was meine Thätigkeit anfänglich in Bewegung setzte, ist in Nebel zerronnen, und woran ich von vornherein auf keine Weise denken konnte, hat Stand gehalten. Dahin rechne ich insbesondere: erstlich die fast vollkommene Bewegungsfähigkeit, welche optische Rechnungen dieser Art durch die Aufstellung der völlig allgemeinen, höchst genauen, und daher in allen Fällen brauchbaren Gleichungen 10. a und b in Ziffer VII. der vorigen Hälfte erhalten haben, wovon man in dieser Hälfte ein sehr sprechendes Beispiel finden wird; zweitens die völlig genaue Bestimmung der Intensität des Lichtes an den verschiedenen Stellen eines Bildes; und nicht minder drittens den im Anhange befindlichen Nachweis von der überaus grossen Abweichung der gewöhnlichen Intensitätsgleichungen von den erfahrungsmässigen Erscheinungen innerhalb Krystallplatten von bestimmter Art. Meine Abhandlung füllt übrigens auch nach erlittenem Verluste noch ganz den Titel aus, unter dem ich sie gegeben habe.

Schon die Aufschrift dieser zweiten Hälfte giebt, wenn man sie an die von Langberg's Auszug hält, deutlich genug zu verstehen, dass beide Arbeiten nicht ohne Berührungspunkte seyn werden, die hier hervorgehoben und besprochen zu werden verdienten; allein zu solchem Zwecke hätte ich die norwegische Schrift erst lesen lernen müssen,

weil ihr sehr gedrängter Auszug kaum die dazu erforderliche Sicherheit darbietet. Darum zog ich es vor, meine zweite Hälfte in ihrer ursprünglichen Fassung bestehen zu lassen, um so mehr, weil aus jenem Auszug hervorzugehen scheint, dass meine Bearbeitung des gleichen Gegenstandes doch beträchtlich verschieden von der des Herrn Langberg ist und dass beide miteinander nur in sehr wenigen Punkten eigentlich zusammentreffen. Da jedoch, wo ich die Eigenthümlichkeit meiner Arbeit durch Versuche unterstütze, erlaube ich mir von der, dem Langberg'schen Auszug beigegebenen Tafel V. des angezeigten Supplementbandes zu Poggendorff's Annalen Gebrauch zu machen, weil in dieser viele Figuren vorkommen, welche das, was ich zu sagen habe, zu versinnlichen ganz geeignet sind.

C) Bestimmung der in zwei übereinander gelegten Krystallplatten mit parallelen Oberflächen entstehenden Interferenz-Erscheinungen.

XXV. Nachdem eine allgemeine Theorie der in einer einzigen einaxigen Krystallplatte sichtbaren Interferenz-Erscheinungen vorangeschickt worden ist, wird es nunmehr möglich, die an zwei oder mehr übereinander gelegten solchen Platten entstehenden Bilder einer genauern Untersuchung zu unterwerfen, womit wir uns jetzt beschäftigen werden. Zuvor jedoch wollen wir einen andern Weg, zu der einer einzigen Platte angehörigen Intensitäts-Gleichung (6. b) in Ziffer VIII. zu gelangen, als der dort eingeschlagene war, anzeigen, wie schon a. a. O. versprochen worden ist, den wir dann auch bei allen noch folgenden Betrachtungen benützen werden, und der hier um so nöthiger wird, als es schwer hält, bei mehrern Platten die relative Lage der einzelnen Theile durch blosse Anschauung unverrückt festzuhalten, was jedoch durch die hierzu von der analytischen Geometrie an die Hand gegebenen festen Regeln selbst in den zusammengesetztesten Fällen stets mit gleicher Leichtigkeit geschehen kann.

Die Gleichung einer Ebene, deren Normale mit den Coordinatenaxen der x, y, z bezüglich die Winkel a, b, c macht, ist bekanntlich:

(1. a) $$x \cos. a + y \cos. b + z \cos. c = o,$$

wenn man sich diese Ebene durch die Spitze des Coordinatensystems hindurch gehend denkt. Ist neben dieser Ebene noch eine durch die Coordinatenspitze hindurch gehende Richtung gegeben, welche mit denselben Coordinatenaxen die Winkel a_1, b_1, c_1 einschliesst, und nimmt man an, dass diese Richtung auf jene Ebene senkrecht projicirt werde, und dass die Winkel, welche diese Projection der gegebenen Richtung mit den Coordinatenaxen macht, bezüglich α_1, β_1, γ_1 seien, so machen wir es uns zur Aufgabe, die Gleichung der projicirenden Ebene, so wie die Werthe von α_1, β_1, γ_1 aus den gegebenen Grössen a, b, c, und a_1, b_1, c_1 herzuholen. Bezeichnen wir vorerst die Gleichung der projicirenden Ebene durch $A_1 x + B_1 y + C_1 z = o$, so muss, weil die projicirende Ebene durch die gegebene Richtung und durch die gegebene Normale zur Projectionsebene hindurch geht, jeder Punkt dieser Richtung und dieser Normale der projicirenden Ebene angehören; fassen wir aber von der gegebenen Richtung den Punkt in's Auge, dessen Abstand von der Coordinatenspitze die Längeneinheit ist, so werden seine Coordinaten durch die Gleichungen

$$x = \cos. a_1 \quad , \quad y = \cos. b_1 \quad , \quad z = \cos. c_1$$

gegeben, und auf ähnliche Weise werden die Coordinaten desjenigen Punktes der Normale, dessen Abstand von der Coordinatenspitze ebenfalls die Längeneinheit ist, gegeben durch die Gleichungen:

$$x = \cos. a \quad , \quad y = \cos. b \quad , \quad z = \cos. c,$$

und da beide Punkte der projicirenden Ebene angehören, so müssen ihre Coordinatenwerthe die Gleichung der projicirenden Ebene befriedigen, wenn man sie für x, y, z in dieselbe einsetzt, so dass man erhält:

$$A_1 \cos. a_1 + B_1 \cos. b_1 + C_1 \cos. c_1 = o \text{ nebst}$$
$$A_1 \cos. a + B_1 \cos. b + C_1 \cos. c = o$$

und aus diesen beiden Gleichungen findet man durch successive Elimination von zweien der drei Grössen A_1, B_1 und C_1:

$$A_1 : B_1 : C_1 = \cos. b \cos. c_1 - \cos. b_1 \cos. c : \cos. c \cos. a_1 - \cos. c_1 \cos. a : \cos. a \cos. b_1 - \cos. a_1 \cos. b, \quad (1. b)$$

wodurch die Gleichung der projicirenden Ebene gefunden ist.

Weil ferner die projicirte Richtung der Durchschnitt zwischen dieser und der gegebenen Ebene ist, und dieser Durchschnitt durch den Verein der beiden Gleichungen:

$$x \cos. a + y \cos. b + z \cos. c = o \text{ nebst } A_1 x + B_1 y + C_1 z = o$$

dargestellt wird, so muss der Punkt der projicirten Richtung, dessen Abstand von der Coordinatenspitze die Längeneinheit ist, und dessen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x = \cos. \alpha_1 \quad , \quad y = \cos. \beta_1 \quad , \quad z = \cos. \gamma_1$$

gegeben sind, den vorstehenden zwei Gleichungen gleichzeitig angehören, so dass man zur Bestimmung von α_1, β_1, γ_1 die beiden Gleichungen

$$\cos. \alpha_1 \cos. a + \cos. \beta_1 \cos. b + \cos. \gamma_1 \cos. c = o \text{ nebst}$$
$$A_1 \cos. \alpha_1 + B_1 \cos. \beta_1 + C_1 \cos. \gamma_1 = o$$

erhält, aus denen man durch successive Elimination von zweien der drei Grössen $\cos. \alpha_1$, $\cos. \beta_1$, $\cos. \gamma_1$ findet:

$$\cos. \alpha_1 : \cos. \beta_1 : \cos. \gamma_1 = C_1 \cos. b - B_1 \cos. c : A_1 \cos. c - C_1 \cos. a : B_1 \cos. a - A_1 \cos. b,$$

welchen Verhältnissgleichungen gemäss man setzen kann:

$$H\cos.\alpha_1 = C_1\cos.b - B_1\cos.c \quad , \quad H\cos.\beta_1 = A_1\cos.c - C_1\cos.a \ ,$$
$$H\cos.\gamma_1 = B_1\cos.a - A_1\cos.b$$

wenn H eine erst noch zu bestimmende Grösse vorstellt.

Man hat das Recht, in diese Gleichungen für A_1, B_1, C_1 deren durch die Gleichungen (1. b) ihnen zugewiesene proportionalen Zahlen einzusetzen, weil sich hiernach die noch nicht gefundene Grösse von H richtet; thut man diess und bezeichnet man zugleich durch φ_1 den Winkel, den die durch a_1, b_1, c_1 gegebene Richtung mit der durch a, b, c gegebenen Normale zur Projectionsebene macht, so dass

$$\cos.a\cos.a_1 + \cos.b\cos.b_1 + \cos.c\cos.c_1 = \cos.\varphi_1$$

wird, so gehen jene Gleichungen, weil auch $\cos^2.a + \cos^2.b + \cos^2.c = 1$ ist, über in:

$$(1.c)\begin{cases} H\cos.\alpha_1 = \cos.a\cos.\varphi_1 - \cos.a_1 \ , \quad H\cos.\beta_1 = \cos.b\cos.\varphi_1 - \cos.b_1, \\ H\cos.\gamma_1 = \cos.c\cos.\varphi_1 - \cos.c_1. \end{cases}$$

Quadrirt und addirt man diese drei letzten Gleichungen, so ergiebt sich, weil $\cos^2.a_1 + \cos^2.b_1 + \cos^2.c_1 = 1, \cos^2.\alpha_1 + \cos^2.\beta_1 + \cos^2.\gamma_1 = 1$ ist,

$$H^2 = \sin^2.\varphi_1.$$

Nimmt man für H seinen negativen Wurzelwerth $-\sin.\varphi_1$, so verwandeln sich die Gleichungen (1. c) in

$$(1.\ d.)\begin{cases} \sin.\varphi_1\cos.\alpha_1 = \cos.a_1 - \cos.a\cos.\varphi_1 \ , \\ \sin.\varphi_1\cos.\beta_1 = \cos.b_1 - \cos.b\cos.\varphi_1 \ , \\ \sin.\varphi_1\cos.\gamma_1 = \cos.c_1 - \cos.c\cos.\varphi_1 \ , \end{cases}$$

wobei zu merken ist, dass derjenige von den zwei Werthen von H gewählt worden ist, welcher macht, dass die von der Coordinatenspitze auslaufenden und in der projicirenden Ebene liegenden Richtungen

a_1, b_1, c_1 und α_1, β_1, γ_1, von denen letztere die Projection der ersten ist, auf derselben Seite von der Normale zur Projectionsebene liegen. Stellt ψ_1 den Winkel vor, welchen die Richtung a_1, b_1, c_1 mit ihrer eigenen Projection macht, so ist

$$\cos.\psi_1 = \cos.a_1 \cos.\alpha_1 + \cos.b_1 \cos.\beta_1 + \cos.c_1 \cos.\gamma_1,$$

und setzt man in diese Gleichung für $\cos.\alpha_1$, $\cos.\beta_1$, $\cos.\gamma_1$ ihre aus den Gleichungen (1. d) genommenen Werthe ein, so findet man:

$$\cos.\psi_1 = \sin.\varphi_1. \qquad (1.\ e)$$

Betrachtet man neben der vorigen Richtung noch eine zweite von der Coordinatenspitze auslaufende, welche mit den Coordinatenaxen bezüglich die Winkel a_2, b_2, c_2 bildet, in ihren Beziehungen zu der gleichen Projectionsebene, und stellt man die projicirende Ebene dieser zweiten Richtung durch die Gleichung $A_2x + B_2y + C_2z = o$ dar, nennt φ_2 den Winkel, welchen diese zweite Richtung mit der Normale zur Projectionsebene macht, so wie α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche die Projection dieser zweiten Richtung mit den Coordinatenaxen macht, so verwandelt sich in Betreff dieser zweiten Richtung die Gleichung (1. b) in:

$$\left.\begin{aligned} A_2 : B_2 : C_2 = \cos.b \cos.c_2 - \cos.b_2 \cos.c : \cos.c \cos.a_2 - \cos.c_2 \cos.a \\ : \cos.a \cos.b_2 - \cos.a_2 \cos.b \end{aligned}\right\} (2.\ a)$$

und die Gleichungen (1. d) werden bei der jetzigen Richtung:

$$\left.\begin{aligned} \sin.\varphi_2 \cos.\alpha_2 &= \cos.a_2 - \cos.a \cos.\varphi_2\ , \\ \sin.\varphi_2 \cos.\beta_2 &= \cos.b_2 - \cos.b \cos.\varphi_2\ , \\ \sin.\varphi_2 \cos.\gamma_2 &= \cos.c_2 - \cos.c \cos.\varphi_2. \end{aligned}\right\} (2.\ b)$$

Stellt ψ_2 den Winkel vor, welchen die zweite Richtung mit ihrer eigenen Projection macht, so tritt an die Stelle der Gleichung (1. e) die:

$$\cos.\psi_2 = \sin.\varphi_2; \qquad (2.\ c)$$

stellen ferner ψ'_1 oder ψ'_2 die Winkel vor, welche die Projection der

ersten oder zweiten Richtung mit der zweiten oder ersten Richtung macht, so dass

$$\cos.\psi'_1 = \cos.\alpha_1 \cos.a_2 + \cos.\beta_1 \cos.b_2 + \cos.\gamma_1 \cos.c_2 \text{ und}$$
$$\cos.\psi'_2 = \cos.\alpha_2 \cos.a_1 + \cos.\beta_2 \cos.b_1 + \cos.\gamma_2 \cos.c_1$$

ist, so gehen diese beiden Gleichungen dadurch, dass man in sie für $\cos.\alpha_1$, $\cos.\beta_1$, $\cos.\gamma_1$ oder $\cos.\alpha_2$, $\cos.\beta_2$, $\cos.\gamma_2$ ihre aus den Gleichungen (1. d) oder (2. b) entnommenen Werthe einsetzt, über in:

$$(2.\ d) \left\{ \begin{array}{l} \sin.\varphi_1 \cos.\psi'_1 = \cos.A - \cos.\varphi_1 \cos.\varphi_2 \text{ und} \\ \sin.\varphi_2 \cos.\psi'_2 = \cos.A - \cos.\varphi_1 \cos.\varphi_2, \end{array} \right.$$

wenn A den Winkel bedeutet, den die erste und zweite Richtung unter sich einschliessen, und aus diesen beiden Gleichungen folgt sogleich noch, dass

$$(2.\ e) \qquad \sin.\varphi_1 \cos.\psi'_1 = \sin.\varphi_2 \cos.\psi'_2.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die zu beiden Richtungen gehörigen projicirenden Ebenen mit einander bilden, durch χ, so ist den bekanntesten Relationen der analytischen Geometrie zur Folge:

$$(2.\ f) \qquad \cos.\chi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

und man darf in dieser Gleichung für A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 deren durch die Gleichungen (1. b) und (2. a) ihnen zugewiesene proportionale Zahlen setzen; thut man diess, so wird

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = (\cos.A - \cos.\varphi_1 \cos.\varphi_2).K\ ,$$
$$\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} = \sin.\varphi_1 \sin.\varphi_2 .K\ ,$$

und mittelst dieser Auswerthungen verwandelt sich die Gleichung (2. f) in:

$$(2.\ g) \qquad \cos.\chi = \frac{\cos.A - \cos.\varphi_1 \cos.\varphi_2}{\sin.\varphi_1 \sin.\varphi_2},$$

vorausgesetzt, dass man für $\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$ und $\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$ jedesmal nur den positiven Wurzelwerth nimmt, wo dann χ stets zugleich

mit ψ'_1 und ψ'_2 spitz oder stumpf wird. In dem besondern Falle, wo eine von den beiden Richtungen mit der Normale zur Projectionsebene zusammenfällt, wird derjenige von den Winkeln φ_1 und φ_2, welcher zu dieser Richtung gehört, null, während A in den zur andern Richtung gehörigen übergeht, und es nimmt dann in Folge dessen $\cos.\chi$ die Form $\frac{0}{0}$ an.

Die Gleichung (2. g) in Verbindung mit denen (2. d) führt sogleich noch zu den zwei andern hin:

$$\cos.\psi'_1 = \sin.\varphi_2 \cos.\chi \text{ und } \cos.\psi'_2 = \sin.\varphi_1 \cos.\chi, \qquad (2.\ h)$$

und es ist χ zugleich der Winkel, den die Projectionen der beiden Richtungen mit einander machen, wovon man sich auch unmittelbar durch die Gleichungen (1. d) und (2. b) Ueberzeugung verschaffen kann.

XXVI. Die vorstehenden Relationen, zu welchen zwei Richtungen in Verbindung mit einer Ebene Anlass geben, sind mehr als hinreichend, um zu der in Ziffer VIII. der ersten Hälfte dieser Abhandlung aufgefundenen Intensitäts-Gleichung (6. b) auf folgende sehr einfache Weise zu gelangen: Sieht man die Schwingungsrichtung des vom vordern Polarisationsmittel herkommenden Lichtes als erste Richtung an, und als zweite die Schwingungsrichtung des vom hintern Polarisationsmittel herkommenden Lichtes, und bei einem bestimmten auf die Krystallplatte einfallenden Lichtstrahl dessen Hauptschnitt als Projectionsebene, so sind auf diese zwei Schwingungsrichtungen und jeglichen Hauptschnitt alle vorstehenden Gleichungen sofort in Anwendung zu bringen. Da nun das zur Platte gelangende polarisirte Licht, dessen Schwingungen längs der ersten Richtung vor sich gehen, sich bei seinem Durchgange durch die Platte zerlegen muss in einen Antheil, dessen Schwingungen längs der Normale zum Hauptschnitt geschehen, und in einen zweiten Antheil, dessen Schwingungen längs des Hauptschnittes selbst, also längs

der Projection der ersten Richtung auf ihn geschehen, weil alle drei Schwingungsrichtungen dem Zerlegungsgesetze gemäss in einer und derselben Ebene liegen müssen, so bildet die Schwingungsrichtung des vom vordern Polarisationsmittel herkommenden Lichtes, wenn wir die vorhin eingeführten Bezeichnungen beibehalten, mit den Schwingungsrichtungen der zwei Antheile, in welche sich dasselbe bei seinem Durchgang durch die Platte zerlegt, die Winkel φ_1 und ψ_1. Ist daher die Schwingungsform des zur Platte gelangenden Lichtes $\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda}$, so wird die Schwingungsform des längs der Normale zum Hauptschnitt schwingenden Antheils:

$$\mathfrak{A} \cos. \varphi_1 \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda},$$

und die des längs der Projection der ersten Richtung auf den Hauptschnitt schwingenden Antheils, nachdem beide durch die Platte hindurch gedrungen sind und dadurch den Raum-Phasenunterschied Θ erlangt haben:

$$\mathfrak{A} \cos. \psi_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \Theta\right).$$

Bei der angenommenen Bezeichnungsweise macht die Normale zum Hauptschnitt mit der Schwingungsrichtung des vom hintern Polarisationsmittel herkommenden Lichtes, als zweite Richtung gedacht, den Winkel φ_2, und die Projection der ersten Richtung auf den Hauptschnitt macht mit dieser zweiten Richtung den Winkel ψ'_1. Da nun die zwei vorstehenden Lichtantheile sich am hintern Polarisationsmittel neuerdings zerlegen müssen und von den so entstehenden Seitenbewegungen blos diejenigen übrig bleiben, welche längs dieser zweiten Richtung erfolgen, so sind die vom hintern Polarisationsmittel in's Auge geschickten Lichtportionen:

$$(3.\ a) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2 \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda} \text{ und} \\ \mathfrak{A} \cos. \psi_1 \cos. \psi'_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \Theta\right), \end{array} \right.$$

welche, wenn man für $\cos.\psi_1$ und $\cos.\psi'_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (1. e) und (2. h) einsetzt, auch in folgender Gestalt sich schreiben lassen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A}\cos.\varphi_1\cos.\varphi_2\sin.2\pi\frac{vt-x}{\lambda} \text{ und} \\ \mathfrak{A}\sin.\varphi_1\sin.\varphi_2\cos.\chi\sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta\right).\end{array}\right\} \quad (3.\ b)$$

Die Schwingungen dieser Lichtportionen geschehen bei allen längs der zweiten Richtung und lassen sich daher der in Ziffer (V.) mitgetheilten Regel gemäss in einen einzigen Wellenzug zusammen setzen, dessen Lichtstärke, wenn wir sie durch A^2 bezeichnen, durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$A^2 = \mathfrak{A}^2(\cos^2.\varphi_1\cos^2.\varphi_2+\cos^2.\psi_1\cos^2.\psi'_1 \\ +2\cos.\varphi_1\cos.\varphi_2\cos.\psi_1\cos.\psi'_1\cos.2\pi\Theta),$$

welche sich auch in der andern Form schreiben lässt:

$$A^2 = \mathfrak{A}^2[(\cos.\varphi_1\cos.\varphi_2+\cos.\psi_1\cos.\psi'_1)^2 \\ -4\cos.\varphi_1\cos.\varphi_2\cos.\psi_1\cos.\psi'_1\sin^2.\pi\Theta],$$

und nun, wenn man in dieser, der Gleichung (1. e) gemäss, $\sin.\varphi_1$ an die Stelle von $\cos.\psi_1$, so wie, der Gleichung (2. h) gemäss, $\sin.\varphi_2\cos.\chi$ an die Stelle von $\cos.\psi'_1$ setzt, mit Zuziehung der Gleichung (2. g) wird:

$$A^2 = \mathfrak{A}^2(\cos^2.\mathit{A}-\sin.2\varphi_1\sin.2\varphi_2\cos.\chi\sin^2.\pi\Theta), \qquad (3.\ c)$$

welche dieselbe ist, wie die in Ziffer VIII. unter (6. b) aufgeführte, denn dass hier $\mathfrak{A}$ wo dort a steht, kommt daher, dass diese Buchstaben-Verwechselung schon von vorn herein in die Schwingungsform des ankommenden Lichtes aus dem Grunde gelegt worden ist, weil hier a zu anderer Bedeutung benützt worden ist.

XXVII. Ausgerüstet mit den Gleichungen der zwei vorigen Nummern können wir nun getrost an die Untersuchung der in zwei oder mehr über einander gelegten Platten entstehenden Erscheinungen gehen,

wobei wir wieder demselben Grundsatze huldigen werden, den wir schon in der ersten Hälfte dieser Abhandlung befolgt haben, nämlich den Gegenstand in grösster Allgemeinheit aufzufassen und möglichst vollständig durchzuführen. Um jedoch nicht in zu breite Formeln verwickelt zu werden, setzen wir zwar überall voraus, dass die übereinander gelegten Platten aus jeglichem einaxigen Krystalle geschnitten worden seyn können, und dass jeder Schnitt unter beliebiger Neigung zur optischen Axe durch den Krystall hindurch geführt worden seyn dürfe; aber es wird an jede einzelne Platte, wie bisher schon immer, die Anforderung gemacht, dass ihre Oberflächen unter sich parallel seien und da, wo mehrere solche Platten übereinander gelegt werden, verlangen wir noch überdiess, dass es in der Art geschehe, wobei die Oberflächen der einen denen der andern parallel laufen. Dieser Parallelismus sämmtlicher Oberflächen vereinfacht alle Auseinandersetzungen ungemein, weil er zur Folge hat, dass alles Licht die hintere Fläche einer jeden einzelnen Platte wieder in derselben Richtung verlässt, in welcher es auf die vordere Fläche der Platte gekommen ist, und dass diese Richtung in mehrern übereinander gelegten Platten stets die gleiche bleibt. Diese Unveränderlichkeit in der Richtung eines Lichtstrahls diesseits und jenseits von Platten mit parallelen Oberflächen, die er durchzieht, besteht selbst noch in jenen beiden Theilen fort, in die sich jeder Lichtstrahl während seines Durchgangs durch eine Krystallplatte zu spalten pflegt, und die wir durch die Beiwörter „gewöhnlich" und „aussergewöhnlich" von einander unterschieden haben; auch sie laufen ausserhalb der Platten, wiewohl getrennt, unter einander, so wie mit dem Strahle, aus dem sie herstammen, parallel. Eben deswegen behält das von einem und demselben Lichtstrahle herkommende gewöhnliche und aussergewöhnliche Licht, so lange es sich zwischen zwei Platten fortbewegt, stets den gleichen Phasenunterschied, und hierin eben liegt der Grund, warum Platten mit parallelen Oberflächen eine viel grössere Einfachheit der Betrachtungen gestatten als solche, die diese Bedingung nicht erfüllen.

XXVIII. Was nun zuvörderst die Bestimmung des Phasenunterschieds betrifft, den das durch zwei übereinander gelegte Platten von der geforderten Beschaffenheit hindurch gegangene gewöhnliche und aussergewöhnliche Licht annimmt, so geht diese mittelst der oben in Ziffer VII. aufgefundenen Gleichungen (10. a und b), nämlich der folgenden, in welcher Θ den in Zeit ausgedrückten Phasenunterschied bedeutet:

$$\Theta \frac{v}{T} = C + D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega \quad (1. a)$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{v}{m} - \frac{v}{v'} = C \;, & \frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{m^2} \sin. 2a = D, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v'}{v} - \frac{v''^2}{vm}\right) = B \;, & \frac{1}{2}\left(\frac{v'}{v} - \frac{v'^2 v''^2}{vm^2}\right) = A, \end{array}\right\} \quad (1. b)$$

ganz leicht von Statten. Das vom vordern Polarisationsmittel herkommende Licht, welches der ihm zugewandten Platte begegnet, durchdringt diese gerade so, als ob sie allein vorhanden wäre, und spaltet sich während seines Durchgangs durch die Platte in zwei Hälften, welche unter sich einen Phasenunterschied Θ annehmen, der bei dem Austritt des gewöhnlichen und aussergewöhnlichen Lichts aus dieser Platte eine Grösse erlangt, welche durch die Gleichung (1. a) bestimmt wird, nachdem deren Coefficienten mittelst der Gleichungen (1. b) der Natur dieser Platte gemäss gefunden worden sind. Die gewöhnliche sowohl wie die ungewöhnliche Hälfte des aus einem Strahle herstammenden Lichtes gelangen von da zu der dem Lichte abgewandten Platte und erreichen diese mit demselben Phasenunterschiede, womit sie die vorige verlassen haben, wenn beide Platten die in Ziffer XXVII. ausbedungenen Eigenschaften besitzen. Von jeder dieser Hälfte einzeln genommen gilt aber, während sie durch die zweite Platte gehen, wieder alles das, was so eben von ihrer Vereinigung, bevor diese die erste Platte durchzog, ausgesagt worden ist; jede für sich spaltet sich, während ihres Durchgangs durch die zweite Platte im Allgemeinen in zwei Theile, den gewöhnlichen und den aussergewöhnlichen in Bezug auf die zweite Platte,

die beide mit einem Zeit-Phasenunterschied Θ' aus der zweiten Platte hervortreten, welcher durch eine der (1. a) analoge Gleichung nämlich:

$$(1.\ c)\quad \Theta' \frac{v}{T'} = C' + D' \sin.i \cos.\omega' + B' \sin^2.i \sin^2.\omega' + A' \sin^2.i.\cos^2.\omega'$$

gefunden wird, worin die Buchstaben Θ, T und ω so wie die A, B, C, D einen Accent erhalten haben, um damit anzudeuten, dass diese Grössen je nach der Beschaffenheit und Lage der zweiten Platte hier andere Werthe als in der Gleichung (1. a) haben können, während die Buchstaben v und i die gleichen Werthe hier wie dort behalten, wenn das gleiche einfache Licht zu beiden Platten gelangt und die Oberflächen dieser unter sich parallel sind, was eine Folge der in Ziffer XXVII. gegebenen Erörterungen ist. Nimmt man die Summe sowohl als die Differenz der Gleichungen (1. a) und (1. c), so findet man die folgenden zwei Gleichungen:

$$(2.\ a)\quad \begin{cases} v\left(\frac{\Theta}{T} + \frac{\Theta'}{T'}\right) = C + C' + \sin.i\,(D \cos.\omega + D' \cos.\omega') \\ + \sin^2.i\,(B \sin^2.\omega + B' \sin^2.\omega') + \sin^2.i\,(A \cos^2.\omega + A' \cos^2.\omega') \\ \text{und} \\ v\left(\frac{\Theta}{T} - \frac{\Theta'}{T'}\right) = C - C' + \sin.i\,(D \cos.\omega - D' \cos.\omega') \\ + \sin^2.i\,(B \sin^2.\omega - B' \sin^2.\omega') + \sin^2.i\,(A \cos^2.\omega - A' \cos^2.\omega'). \end{cases}$$

Sind die beiden Platten aus einem und demselben Krystall geschnitten und haben ihre Oberflächen einerlei Neigung zur optischen Axe, so wird $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$ und $D' = D$, wodurch die Gleichungen (2. a) übergehen in:

$$(2.\ b)\quad \begin{cases} v\left(\frac{\Theta}{T} + \frac{\Theta'}{T'}\right) = 2C + D \sin.i\,(\cos.\omega + \cos.\omega') \\ + B \sin^2.i\,(\sin^2.\omega + \sin^2.\omega') + A \sin^2.i\,(\cos^2.\omega + \cos^2.\omega') \\ \text{und} \\ v\left(\frac{\Theta}{T} - \frac{\Theta'}{T'}\right) = D \sin.i\,(\cos.\omega - \cos.\omega') \\ + B \sin^2.i\,(\sin^2.\omega - \sin^2.\omega') + A \sin^2.i\,(\cos^2.\omega - \cos^2.\omega'), \end{cases}$$

und diese Gleichungen verwandeln sich, im Falle beide Platten gleich dick sind, wo dann $T' = T$ ist, in:

$$\left.\begin{aligned} v\frac{\Theta+\Theta'}{T} &= 2C + D\sin.i(\cos.\omega + \cos.\omega') \\ &+ B\sin^2.i(\sin^2.\omega + \sin^2.\omega') + A\sin^2.i(\cos^2.\omega + \cos^2.\omega') \\ \text{und} \\ v\frac{\Theta-\Theta'}{T} &= D\sin.i(\cos.\omega - \cos.\omega') \\ &+ B\sin^2.i(\sin^2.\omega - \sin^2.\omega') + A\sin^2.i(\cos^2.\omega - \cos^2.\omega'). \end{aligned}\right\} \quad (2.\ c)$$

Die Gleichungen (2. b) oder (2. c) finden nur dann ihre Anwendung, wenn die beiden Platten aus einerlei Krystall und unter gleicher Schiefe zu seiner optischen Axe geschnitten worden sind, während die Gleichungen (2. a) Giltigkeit behalten, wenn auch jede Platte aus einem andern einaxigen Krystall und in verschiedener Weise genommen worden ist.

Fügt man zu dem in dieser Ziffer Gesagten noch die Bemerkung hinzu, dass die beiden Hälften, in welche das auf die vordere Platte fallende Licht, während es diese Platte durchzieht, zerlegt wird und die durch I. und II. bezeichnet werden sollen, einen Phasenunterschied annehmen, der nach ihrem völligen Durchgang durch die Platte die Grösse Θ erreicht, um welche die Schwingungsform des aussergewöhnlichen Lichtes von der des gewöhnlichen abweicht, und dass jede dieser Hälften bei ihrem Durchgang durch die zweite Platte sich wieder auf dieselbe Weise in zwei Theile spaltet, von denen der aussergewöhnliche dem gewöhnlichen mehr und mehr voraneilt, welcher Phasenunterschied nach dem Durchgange des Lichts durch die ganze zweite Platte hindurch die Grösse Θ' erreicht, so überzeugt man sich, dass der aussergewöhnliche Theil von der Hälfte I. vor deren gewöhnlichen den Zeit-Phasenvorsprung Θ' hat, und dass der gewöhnliche Theil der Hälfte II. vor dem der Hälfte I. den Vorsprung Θ, so wie der gewöhnliche Theil der



Hälfte II. vor dem aussergewöhnlichen von der Hälfte I. den Zeit-Vorsprung $\Theta + \Theta'$ hat, weil die Hälfte I. vor der II. schon bei deren Austritt aus der ersten Platte den Phasenvorsprung Θ hatte. Diese Bestimmungen, welche für das Licht von einer bestimmten Richtung ausserhalb der Platten stets wahr bleiben, enthalten alles in sich, was zur Feststellung der Phasenunterschiede in den vier aus einer Verbindung zweier Platten hervortretenden Lichtantheilen erforderlich ist.

XXIX. Wir werden nun den Gang des Lichts durch zwei übereinander gelegte Platten hindurch verfolgen, unter der Voraussetzung, dass dieses Licht, bevor es zu den Platten gelangt, und auch wieder, nachdem es dieselben verlassen hat, polarisirt und dadurch gezwungen werde, seine Schwingungen ausserhalb der Platten in vorgeschriebenen Richtungen zu bewirken. Denken wir uns durch einen bestimmten auf die erste Platte einfallenden Lichtstrahl und durch die optische Axe dieser Platte eine Ebene gelegt, welche der zu diesem Lichtstrahle gehörige Hauptschnitt ist, und bezeichnen wir durch φ_1 den Winkel, welchen die Normale zu diesem Hauptschnitt mit der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes macht, so muss sich dieses Licht beim Durchgang durch die erste Platte in zwei Theile zerlegen, von denen der erste längs der Normale zum Hauptschnitt und der zweite längs dieses Hauptschnitts selber schwingt, zufolge der in Ziffer (III.) angegebenen Eigenschaft einaxiger Krystalle, und da diese drei Schwingungsrichtungen dem Zerlegungsgesetze gemäss immer in einer und derselben Ebene liegen müssen, so ist die letzte nothwendig der Projection der ersten auf den Hauptschnitt parallel; nennen wir daher ψ_1 den Winkel, welchen diese Projection mit der Schwingungsrichtung des ankommenden Lichtes macht, und ist $\mathfrak{A} \sin. 2\pi \frac{vt - x}{\lambda}$ seine Schwingungsform, so ist

$$(1.\ a) \qquad \mathfrak{A} \cos. \varphi_1 \sin. 2\pi \frac{vt - x}{\lambda}$$

der in der ersten Platte gebildete längs der Normale zum Hauptschnitt schwingende Theil, und eben so ist

$$\mathfrak{A} \cos. \psi_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} + \Theta \right) \qquad (1.\ b)$$

der längs der Projection der Schwingungsrichtung des ankommenden Lichtstrahls auf den Hauptschnitt der ersten Platte schwingende Theil, nachdem er durch die Platte hindurch gegangen ist, und dadurch den Phasenunterschied Θ in Vergleich zum vorigen Theil angenommen hat. Da φ_1 der Winkel ist, den die Schwingungsrichtung des ankommenden Lichtes mit der Normale zum Hauptschnitt macht, und ψ_1 der, den dieselbe Richtung mit ihrer Projection auf diesen Hauptschnitt macht, so haben diese Winkel hier wieder dieselbe Bedeutung wie in Ziffer XXV.; es ist daher der dortigen Gleichung (1. c) gemäss:

$$\cos. \psi_1 = \sin. \varphi_1. \qquad (1.\ c)$$

Jeder von den beiden Theilen (1. a) und (1. b) dringt in die zweite Platte ein, und wird in dieser neuerdings in zwei Portionen zerlegt, von welchen die eine längs der Normale schwingt, welche demjenigen Hauptschnitt dieser zweiten Platte entspricht, der zu dem vorigen einfallenden Strahle gehört, während die andere ihre Schwingungen längs der Projection der Schwingungsrichtung des in die zweite Platte eindringenden Lichtes auf deren Hauptschnitt vollbringt. Bezeichnen wir daher durch F den Winkel, welchen die Normale zum Hauptschnitt der ersten Platte, längs welcher der Antheil (1. a) schwingt, mit der Normale zum zweiten Hauptschnitt macht, und durch $\mathfrak{F}$ den Winkel, welchen diese erste Normale mit ihrer Projection auf den zweiten Hauptschnitt bildet, so wird der Antheil (1. a), während er die zweite Platte durchzieht, erstlich zerlegt in die Portion:

$$\mathfrak{A} \cos. \varphi_1 \cos. F \sin. 2\pi \frac{vt - x}{\lambda}, \qquad (2.\ a)$$

welche längs der Normale zum zweiten Hauptschnitt schwingt, und zweitens in die Portion:

(2. b) $$\mathfrak{A}\cos.\varphi_1\cos.\mathfrak{F}\sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta'\right),$$

welcher längs der Projection der Normale des ersten Hauptschnitts auf den zweiten schwingt, wenn dieselbe an die Hinterfläche der zweiten Platte gekommen ist, und dort den Phasenunterschied Θ' im Vergleiche zu der Portion (2. a) angenommen hat, und es findet auch hier wieder zwischen den zwei Winkeln F und $\mathfrak{F}$ der Gleichung (1. c) in Ziffer XXV. gemäss die nachstehende Relation statt:

(2. c) $$\cos.\mathfrak{F}=\sin.F.$$

Eben so findet man die zwei Lichtportionen, in welche sich der Antheil (1. b) zerlegt, während er durch die zweite Platte geht, wenn F_1 den Winkel vorstellt, den die Projection der Schwingungsrichtung des zur ersten Platte gelangenden Lichtes auf den ersten Hauptschnitt mit der Normale zum zweiten Hauptschnitt macht, und $\mathfrak{F}_1$ den, welchen diese Projection mit ihrer eigenen wiederholten Projection auf den zweiten Hauptschnitt macht; dann ist nämlich die aus dem Antheil (1. b) hervorgehende Portion, welche längs der Normale zum Hauptschnitt der zweiten Platte schwingt:

(3. a) $$\mathfrak{A}\cos.\psi_1\cos.F_1\sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta\right)$$

und die, welche längs der so eben angezeigten Projection der Projection auf den Hauptschnitt der zweiten Platte schwingt:

(3. b) $$\mathfrak{A}\cos.\psi_1\cos.\mathfrak{F}_1\sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta+\Theta'\right),$$

wenn man sich diese bis zur hintern Seite der zweiten Platte vorgedrungen vorstellt, wo sie dann den Phasenvorsprung Θ' im Vergleiche zu der Portion (3. a) angenommen hat, und es findet zwischen den Winkeln F_1 und $\mathfrak{F}_1$ wiederum die Relation

(3. c) $$\cos.\mathfrak{F}_1=\sin.F_1$$

statt. Die vier Lichtportionen (2. a), (2. b), (3. a) und (3. b) gelangen

an das hintere Polarisationsmittel und finden hier Veranlassung zu einer nochmaligen Zerlegung, aus welcher blos die längs der vom hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung schwingenden Antheile zum Auge gelangen, während die andern für unsere Wahrnehmung ganz verloren gehen, und deswegen von uns nicht weiter betrachtet zu werden brauchen. Nennen wir φ_2 den Winkel, welchen die Normale zum Hauptschnitt der zweiten Platte mit der vom hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung macht, und eben so $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}'_1$ die, welche die Projectionen der Normale des ersten Hauptschnitts und der mehrerwähnten Projection, beide auf den zweiten Hauptschnitt, mit der von dem hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung machen, so erhalten wir die vier sämmtlich längs der vom hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung schwingenden Lichtantheile, welche insgesammt in's Auge gelangen, dem Parallelogramme der Kräfte folgend, auf nachstehende Weise: Der erste dieser 4 Antheile, welchen man aus dem (2. a) durch Multiplication mit $\cos.\varphi_2$ erhält, welcher Winkel der ist, den die Schwingungsrichtung dieses Antheils mit der vom hintern Polarisationsmittel geforderten macht, wird:

$$\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \cos.F \cos.\varphi_2 \sin.2\pi\frac{vt-x}{\lambda}; \qquad (4.\ a)$$

der zweite dieser 4 Antheile, welchen man aus dem (2. b) durch Multiplication mit $\cos.\mathfrak{F}'$ erhält, welcher Winkel der ist, den die Schwingungsrichtung dieses Antheils mit der vom hintern Polarisationsmittel geforderten ist, wird:

$$\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \cos.\mathfrak{F} \cos.\mathfrak{F}' \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta'\right); \qquad (4.\ b)$$

der dritte dieser 4 Antheile, welchen man aus dem (3. a) wiederum durch Multiplication mit $\cos.\varphi_2$ erhält, wird in der gleichen Weise:

$$\mathfrak{A}\cos.\psi_1 \cos.F_1 \cos.\varphi_2 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta\right); \qquad (4.\ c)$$

endlich wird der letzte dieser 4 Antheile, den man aus dem (3. b) durch Multiplication mit cos. $\mathfrak{F}'_1$ aus dem gleichen Grunde findet:

(4. d) $$\mathfrak{A} \cos.\psi_1 \cos.\mathfrak{F}_1 \cos.\mathfrak{F}'_1 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta+\Theta'\right).$$

Diese vier in's Auge gelangenden Lichtantheile lassen sich, weil sie sämmtlich ihre Schwingungen längs der vom hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung vollbringen, mittelst der Ziffer V. angegebenen Regel in einen einzigen Wellenzug zusammensetzen, aus dessen Bildungsweise sodann die vom Auge wahrgenommene Erscheinung abgelesen werden kann.

XXX. Es ist jetzt an der Zeit, dass wir die Abhängigkeit der in den letzten vier Lichtantheilen vorkommenden Winkel von einander und von andern kennen lernen, um dadurch den Ausdrücken eine bequemere Form ertheilen zu können. Fassen wir erstlich die Normale des ersten Hauptschnitts und die vom hintern Polarisationsmittel geforderte Richtung in Verbindung mit dem zweiten Hauptschnitt als erste und zweite Richtung in's Auge und bezeichnen wir durch χ'_2 den Winkel, welchen die Ebenen, wodurch diese beiden Richtungen auf den Hauptschnitt der zweiten Platte projicirt werden, unter sich einschliessen, so ist, weil $\mathfrak{F}'$ den Winkel vorstellt, den die Projection der ersten Richtung auf den zweiten Hauptschnitt mit der zweiten Richtung macht, und diese zweite Richtung mit der Normale zur Projectionsebene den Winkel φ_2 macht, der ersten Gleichung (2. h) Ziffer XXV. gemäss:

(1. a) $$\cos.\mathfrak{F}' = \sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2.$$

Fassen wir ferner die Schwingungsrichtung des vom vordern Polarisationsmittel kommenden Lichtes und die Richtung der Normale zum Hauptschnitt der zweiten Platte in Verbindung mit dem Hauptschnitt der ersten Platte als erste und zweite Richtung in's Auge, so ist, weil F_1

den Winkel vorstellt, den die Projection der ersten Richtung auf den Hauptschnitt der ersten Platte mit der zweiten Richtung einschliesst, und diese Richtung mit der Normale zum Hauptschnitt der ersten Platte den Winkel F bildet, derselben Gleichung (2. h) Ziffer XXV. gemäss, wenn χ''_1 den Winkel bedeutet, den die zwei, diese Richtungen auf den Hauptschnitt der ersten Platte projicirenden Ebenen unter sich einschliessen:

$$\cos. F_1 = \sin. F \cos. \chi''_1. \qquad (1.\ b)$$

Fasst man endlich die Richtung, welche die Projection der Schwingungsrichtung des vom vordern Polarisationsmittel kommenden Lichtes auf den ersten Hauptschnitt ist, und die Schwingungsrichtung des vom hintern Polarisationsmittel kommenden Lichtes als erste und zweite Richtung in Verbindung mit dem Hauptschnitt der zweiten Platte in's Auge, so ist, weil $\mathfrak{F}'_1$ den Winkel bezeichnet, den die Projection der ersten Richtung auf den Hauptschnitt der zweiten Platte mit der zweiten Richtung macht, und diese mit der Normale zum Hauptschnitt der zweiten Platte den Winkel φ_2 einschliesst, immer derselben Gleichung (2. h) Ziffer XXV. gemäss, wenn χ_2 den Winkel zwischen den beiden, diese Richtungen auf den zweiten Hauptschnitt projicirenden Ebenen bedeutet:

$$\cos. \mathfrak{F}'_1 = \sin. \varphi_2 \cos. \chi_2. \qquad (1.\ c)$$

Mittelst der in den drei vorhergehenden Gleichungen erhaltenen Werthe von $\mathfrak{F}'$, F_1 und $\mathfrak{F}'_1$ und mit den von ψ_1, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ in den Gleichungen (1. c), (2. c) und (3. c) der vorigen Ziffer gegebenen gehen nun die in derselben Ziffer enthaltenen letzten vier Ausdrücke, welche die vier in's Auge gelangenden Lichtportionen an die Hand geben, über in:

$$(2.\ a)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \cos.F\cos.\varphi_2 \sin.2\pi\frac{vt-x}{\lambda},\\
\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \sin.F\sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta'\right),\\
\mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \sin.F\cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta\right),\\
\mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \sin.F_1 \sin.\varphi_2 \cos.\chi_2 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta+\Theta'\right),
\end{array}\right.$$

welche eine für unsere Zwecke bequemere Form besitzen.

Man kann die letzte dieser 4 Lichtportionen der ersten analoger werden lassen, dadurch dass man den Winkel, den die Projection der vordern Schwingungsrichtung auf den Hauptschnitt der ersten Platte mit der Projection der hintern Schwingungsrichtung auf den zweiten Hauptschnitt macht, einführt und durch G bezeichnet; dann ist nämlich:

$$(2.\ b)\qquad \cos.G = \sin.F_1 \cos.\chi_2,$$

wie sogleich aus den Gleichungen (2. h) der Ziffer XXV. hervorgeht, wenn man die Projection der vordern Schwingungsrichtung auf den Hauptschnitt der ersten Platte und die hintere Schwingungsrichtung als die zwei Richtungen, welche in Verbindung mit dem Hauptschnitt der zweiten Platte als Projectionsebene betrachtet werden, in's Auge fasst. Durch die Gleichung (2. b) nun gehen die vier Lichtportionen (2. a) über in:

$$(2.\ c)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \cos.F\cos.\varphi_2 \sin.2\pi\frac{vt-x}{\lambda},\\
\mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \sin.F\sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta'\right),\\
\mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \sin.F\cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta\right),\\
\mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \cos.G\sin.\varphi_2 \sin.2\pi\left(\frac{vt-x}{\lambda}+\Theta+\Theta'\right).^{*)}
\end{array}\right.$$

*) In allen Gleichungen der gegenwärtigen Ziffer stellen Θ und Θ' die Raum-Phasenunterschiede vor, welche sich aus den Zeit-Phasenunterschieden durch Multiplication mit $\frac{v}{\lambda}$ ergeben.

XXXI. Wir haben bei der bisherigen Behandlung unsers Gegenstandes den Winkel als gegeben vorausgesetzt, den die zu einem bestimmten einfallenden Lichtstrahle gehörigen Hauptschnitte in beiden Platten miteinander machen; bei Versuchen an übereinander liegenden Platten ist aber die Stellung der Hauptnormalebenen in beiden Platten eine gegebene, und die zu verschiedenen einfallenden Strahlen gehörigen Hauptschnitte der beiden Platten bilden bei einer und derselben Stellung dieser Platten gegen einander verschiedene Winkel mit einander, daher kommt man zuweilen in den Fall, diese Verschiedenheit näher angeben zu müssen, welche Zwischenbetrachtung hier eingeschoben werden soll. Schon oben in Ziffer VI. unmittelbar nach der daselbst stehenden Gleichung (12. c) haben wir die Relation:

$$\cos.\alpha = \cos.a\cos.i + \sin.a\sin.i\cos.\omega \qquad (1.\ a)$$

aufgestellt, in welcher α den Winkel vorstellt, den ein bestimmter Lichtstrahl, dessen Einfallsebene mit der Hauptnormalebene einer Krystallplatte den Winkel ω einschliesst, mit der optischen Axe dieser Platte bildet, während i den Einfallswinkel desselben Strahles und a den Winkel bezeichnet, den die Normale zur Oberfläche der Platte mit der in dieser befindlichen optischen Axe macht. Beziehen wir die Gleichung (1. a) auf diejenige von den übereinander liegenden beiden Platten, die dem kommenden Lichte zuerst ausgesetzt ist, und stellen wir noch eine andere für die zweite Platte und denselben Lichtstrahl auf, so wird diese, weil hier a und i dieselben Werthe behalten wie zuvor, wenn die Oberflächen der beiden Platten einerlei Neigung zu deren optischen Axen haben und sämmtlich parallel unter sich sind, wie wir hier immer voraussetzen:

$$\cos.\alpha' = \cos.a\cos.i + \sin.a\sin.i\cos.\omega', \qquad (1.\ b)$$

in welcher α' den Winkel bezeichnet, den der hervorgehobene Lichtstrahl mit der optischen Axe der zweiten Platte bildet, so wie ω' den,

welchen die zu diesem Lichtstrahle gehörige Einfallsebene mit der Hauptnormalebene der zweiten Platte macht.

Fassen wir nun das aus dem hervorgehobenen Lichtstrahle und aus den optischen Axen der beiden Platten gebildete sphärische Dreieck in's Auge, in welchem α und α' die Winkel sind, welche der Lichtstrahl mit den optischen Axen in den beiden Platten macht, so ist den Gesetzen der sphärischen Trigonometrie zur Folge, wenn ε den Winkel bezeichnet, den diese optischen Axen mit einander machen und F den, den die durch den Lichtstrahl und jede der beiden optischen Axen gelegten Ebenen, welche die diesem Lichtstrahle in den beiden Platten zugehörigen Hauptschnitte sind, unter sich einschliessen:

$$(2.\ a) \qquad \cos.\varepsilon = \cos.\alpha \cos.\alpha' + \sin.\alpha \sin.\alpha' \cos.F.$$

Ganz auf die gleiche Weise ergiebt sich aus dem sphärischen Dreiecke, welches aus den beiden optischen Axen und der Normale zu den Oberflächen der Platten gebildet wird, wenn man erwägt, dass der Winkel, den die durch diese Normale und jede der beiden optischen Axen gelegten Ebenen, welche die Hauptnormalebenen der beiden Platten sind, miteinander machen, $\omega' - \omega$ ist, und dass, was zuvor α und α' war, jetzt den gemeinschaftlichen Werth a annimmt:

$$(2.\ b) \qquad \cos.\varepsilon = \cos^2.a + \sin^2.a \cos.(\omega' - \omega).$$

Aus den beiden Gleichungen (2. a) und (2. b) erhält man aber:

$$(2.\ c) \qquad \cos.F = \frac{\cos^2.a + \sin^2.a \cos.(\omega' - \omega) - \cos.\alpha \cos.\alpha'}{\sin.\alpha \sin.\alpha'},$$

und hierin spricht sich die Abhängigkeit des Winkels F, den die zu einem gegebenen einfallenden Lichtstrahle gehörigen Hauptschnitte in den beiden Platten mit einander machen, von dem Winkel $\omega' - \omega$ aus, den die Hauptnormalebenen der beiden Platten unter sich einschliessen.

Aus den Gleichungen (1. a) und (1. b) lassen sich sogleich die andern ableiten:

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\alpha\cos.\alpha' &= \cos^2.a\cos^2.i + \cos.a\cos.i\sin.a\sin.i\,(\cos.\omega+\cos.\omega') \\
&\qquad + \sin^2.a\sin^2.i\cos.\omega\cos.\omega', \\
\cos^2.\alpha &= \cos^2.a\cos^2.i + 2\cos.a\cos.i\sin.a\sin.i\cos.\omega \\
&\qquad + \sin^2.a\sin^2.i\cos^2.\omega, \\
\cos^2.\alpha' &= \cos^2.a\cos^2.i + 2\cos.a\cos.i\sin.a\sin.i\cos.\omega' \\
&\qquad + \sin^2.a\sin^2.i\cos^2.\omega'
\end{aligned}\right\}(3.a)$$

und die Summe der letzten beiden liefert noch:

$$\cos^2.\alpha+\cos^2.\alpha' = 2\cos^2.a\cos^2.i + 2\cos.a\cos.i\sin.a\sin.i\,(\cos.\omega + \cos.\omega') + \sin^2.a\sin^2.i\,(\cos^2.\omega+\cos^2.\omega').$$

Aus der ersten und letzten der Gleichungen (3. a) findet man:

$$\cos^2.\alpha+\cos^2.\alpha'-2\cos.\alpha\cos.\alpha' = \sin^2.a\sin^2.i\,(\cos.\omega-\cos.\omega')^2; \quad (3.\ b)$$

weil ferner

$$\sin^2.\alpha\sin^2.\alpha' = 1-\cos^2.\alpha-\cos^2.\alpha'+\cos^2.\alpha\cos^2.\alpha'$$

ist, oder wenn man für $\cos^2.\alpha+\cos^2.\alpha'$ seinen Werth aus (3. b) einsetzt:

$$\sin^2.\alpha\sin^2.\alpha' = (1-\cos.\alpha\cos.\alpha')^2 - \sin^2.a\sin^2.i\,(\cos.\omega-\cos.\omega')^2,$$

so findet man bis auf vierte Potenzen von sin. i genau:

$$\sin.\alpha\sin.\alpha' = 1-\cos.\alpha\cos.\alpha' - \tfrac{1}{2}\sin^2.a\sin^2.i\,\frac{(\cos.\omega-\cos.\omega')^2}{1-\cos.\alpha\cos.\alpha'}; \quad (3.\ c)$$

aus der ersten Gleichung (3. a) erhält man aber:

$$\left.\begin{aligned}
1-\cos.\alpha\cos.\alpha' &= \sin^2.a - \cos.a\cos.i\sin.a\sin.i\,(\cos.\omega+\cos.\omega') \\
&\qquad + \sin^2.i\,[\cos^2.a - \sin^2.a\cos.\omega\cos.\omega']
\end{aligned}\right\}(3.\ d)$$

und hierdurch verwandelt sich die Gleichung (3. c) bis auf dritte Potenzen von sin. i genau in:

$$(3.\ e)\ \left\{ \begin{array}{l} \sin.\alpha \sin.\alpha' = \sin^2.a - \cos.a \cos.i \sin.a \sin.i\,(\cos.\omega + \cos.\omega') \\ \qquad + \sin^2.i\,[\cos^2.a - \sin^2.a \cos.\omega \cos.\omega' - \tfrac{1}{2}(\cos.\omega - \cos.\omega')^2] \end{array} \right.$$

und man kann in den letzten zwei Gleichungen, wenn man deren Genauigkeit nicht bis auf dritte oder höhere Potenzen von $\sin.i$ treiben will, 1 für $\cos.i$ schreiben, weil hieraus blos Aenderungen innerhalb dieser Potenzen entspringen.

Setzt man nun den Werth von $\sin.\alpha \sin.\alpha'$ aus (3. e) und den von $\cos^2.a - \cos.\alpha \cos.\alpha'$ aus (3. d) in die Gleichung (2. c) ein, und verwandelt man deren rechte Seite in eine nach Potenzen von $\sin.i$ oder eigentlich von $\frac{\sin.i}{\sin.a}$ fortlaufende Reihe, von dieser blos deren 3 erste Glieder beibehaltend, so findet man:

$$(3.\ f)\ \left\{ \begin{array}{l} \cos.F = \cos.(\omega' - \omega) - 2\frac{\sin.i}{\sin.a} \cos.a \sin^2.\frac{\omega' - \omega}{2} (\cos.\omega + \cos.\omega') \\ + \frac{\sin^2.i}{\sin^2.a} \Big[2\sin^2.\frac{\omega' - \omega}{2} [\cos^2.a\,(1 - (\cos.\omega + \cos.\omega')^2) \\ \qquad - \sin^2.a \cos.\omega \cos.\omega'] + \tfrac{1}{2} \cos.(\omega' - \omega)(\cos.\omega - \cos.\omega')^2 \Big]. \end{array} \right.$$

Aus dieser letzten Gleichung geht zwar hervor, dass im Allgemeinen F von $\omega' - \omega$ verschieden ist, und dass bei einem und demselben Werth von $\omega' - \omega$ der Unterschied zwischen F und ihm ein anderer wird, so wie der hervorgehobene Lichtstrahl einer andern Einfallsebene angehört, weil dann die Winkel ω und ω' ihre Werthe ändern; zugleich geht aber auch aus dieser Gleichung hervor, dass diese Unterschiede bei unveränderter Einfallsebene um so kleiner werden, je grösser a in Vergleich zu i ist, wie denn überhaupt die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung nur dann convergirt, wenn $\frac{\sin.i}{\sin.a}$ ein echter Bruch ist und um so stärker je kleiner dieser Bruch wird. Hieraus folgt, dass man die Gleichung (3. f) nur in solchen Fällen benützen darf, wo a beträchtlich grösser als der grösste Werth von i ist, eine Beschränkung, die sich schon in der ersten Hälfte dieser Abhandlung,

wo blos von einer Platte die Rede war, bei allen daselbst gegebenen Bestimmungen der Intensität des Lichtes geltend gemacht hat. Unsere Betrachtungen setzen hier wie dort stets voraus, dass man es mit keinen solchen Platten zu thun habe, deren optische Axen sich nur wenig gegen die Normale zu deren Oberfläche neigen. Das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (3. f) verschwindet in den beiden Fällen, wenn $\omega' = \omega$ oder wenn $\omega' = 180^0 + \omega$ ist, d. h. wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten in einer und derselben Ebene liegen, wo die Unterschiede zwischen F und $\omega' - \omega$ am geringsten sind, ja sogar völlig verschwinden in dem einen Falle, wo $\omega = \omega'$ ist; dann wird nämlich den Gleichungen (1. a) und (1. b) zur Folge $\alpha = \alpha'$ und die Gleichung (2. c) verwandelt sich desshalb in $\cos . F = 1$ und zeigt so, dass hier immer $F = \omega' - \omega = o$ ist. Die Aenderungen, welche die Interferenzerscheinungen in Krytallplatten erleiden, bei welchen i dem Werthe a sich nähert oder ihn gar übertrifft, sind meines Wissens von den Optikern noch gar nicht untersucht worden, und man hat nicht Ursache, sich hierüber zu wundern. Die Geschichte der Wissenschaften zeigt deutlich an, dass die vollkommene Form der Darstellung eines Gegenstandes immer nur hinter dessen gründlicher und allseitiger Erkenntniss hergeht, und die Krystalllehre in der Optik scheint noch nicht in dieses Stadium getreten zu seyn. Hierzu kommt noch, dass das in der Optik vor nicht sehr langer Zeit neu entdeckte Land einen so überschwänglichen Reichthum an glänzenden Thatsachen darbietet, dass jeder Einzelne sich selbst beschränken muss und zufrieden seyn darf, wenn ihm sein Gefühl bezeugt, innerhalb eines noch so eng begrenzten Gebietes aufgeräumt zu haben. Fresnel's magische Leistungen in fast allen Regionen dieser terra incognita liefern eines der erhabensten und seltensten Schauspiele im Reiche der Geister; aber sogar dieser von Gott uns zugesandte Heros hätte ohne Zweifel nur ungleich weniger Materiale sich unterwerfen können, wenn er an die Form, in der seine Eroberungen geschahen, gar zu strenge Forderungen hätte stellen wollen.

Die Gleichung (3. f) nimmt in besondern Fällen einfachere Gestalten an. So giebt sie, wenn $\omega' = \omega$ ist, $\cos. F = 1$, wie wir so eben schon in ganz allgemeiner Weise gefunden haben. Ist $\omega' = 180^0 + \omega$, wo dann $\cos.\omega' = -\cos.\omega$ wird, so liefert sie

$$(4.\ a) \qquad \cos. F = -1 + 2\frac{\sin^2. i}{\sin^2. a}\cos^2. a \sin^2. \omega.$$

Ist endlich $\omega' = 90^0 + \omega$, wo dann $\cos.\omega' = -\sin.\omega$ wird, so giebt sie

$$\cos. F = -\sqrt{2}\frac{\sin. i}{\sin. a}\cos. a \cos.(\omega + 45^0) + \frac{\sin^2. i}{\sin^2. a}\sin.\omega\cos.\omega(1 + \cos^2. a),$$

welche letztere Gleichung, wenn man $\omega + 45^0 = \Omega$ setzt, wird

$$(4.\ b) \quad \cos. F = -\sqrt{2}\frac{\sin. i}{\sin. a}\cos. a \cos.\Omega - \tfrac{1}{2}\frac{\sin^2. i}{\sin^2. a}\cos. 2\Omega(1 + \cos^2. a.)$$

XXXII. Wir kehren nun zu den in Ziffer XXX. aufgestellten Ausdrücken (2. c) zurück, um deren Inhalt näher kennen zu lernen. Zum Zwecke der klaren Auffassung dieser Ausdrücke rufen wir dem Leser in's Gedächtniss zurück, dass sich dieselben auf zwei übereinander gelegte einaxige Krystallplatten mit parallelen Oberflächen beziehen, auf welche polarisirtes Licht auffällt, das von einer zu diesem Behufe angebrachten Vorrichtung, die von uns das vordere Polarisationsmittel genannt worden ist, herkommt, und nachdem es durch die beiden übereinander liegenden Platten hindurch gegangen ist, neuerdings, bevor es zum Auge gelangt, eine bestimmte Schwingungsrichtung mittelst einer desshalb hinter den Platten angebrachten Vorrichtung, die von uns das hintere Polarisationsmittel genannt worden ist, anzunehmen gezwungen wird. Die Schwingungsrichtung des von dem vordern Polarisationsmittel herkommenden Lichtes wird von uns als *vordere,* so wie die des von dem hintern Polarisationsmittel abgehenden Lichtes als *hintere* bezeichnet. Diejenige von den beiden Platten, auf welche das von dem vordern Polarisationsmittel herkommende Licht zuerst auffällt, heisst die *erste* und

zweite die, in welche das durch die erste Platte hindurch gegangene Licht übergeht. Jeder Lichtstrahl wird während seines Durchgangs durch die beiden übereinander liegenden Platten in vier Theile zerlegt, in einer Weise, die lediglich von der Stellung der zu diesem Lichtstrahle gehörigen Hauptschnitte in den beiden Platten oder, was damit auf Eins hinausläuft, von der Lage der zu diesen Hauptschnitten gehörigen Normalen abhängig ist, und wir nennen zur Abkürzung der Rede *ersten* Hauptschnitt den auf einen bestimmten Lichtstrahl sich beziehenden Hauptschnitt der ersten Platte, so wie *zweiten* den, welcher demselben Lichtstrahl in der zweiten Platte angehört. Die Ausdrücke (2. c) der Ziffer XXX. nun stellen diese aus einem beliebigen, jedoch bestimmt gedachten, von dem vordern Polarisationsmittel her durch die beiden Platten und zuletzt noch durch das hintere Polarisationsmittel hindurch gegangenen Lichtstrahle erzeugten vier Lichtantheile dar, und es bezeichnen in ihnen:

φ_1 den Winkel, welchen die vordere Schwingungsrichtung mit der Normale zum ersten Hauptschnitt macht,

φ_2 den Winkel, welchen die hintere Schwingungsrichtung mit der Normale zum zweiten Hauptschnitt macht,

F den Winkel, welchen die Normalen zum ersten und zum zweiten Hauptschnitt unter sich einschliessen, ferner

G den Winkel, welchen die senkrechte Projection der vordern Schwingungsrichtung auf den ersten Hauptschnitt mit der senkrechten Projection der hintern Schwingungsrichtung auf den zweiten Hauptschnitt bildet, und

χ''_1 den Winkel, welchen die zwei Ebenen mit einander machen, wodurch die vordere Schwingungsrichtung und die Normale zum

zweiten Hauptschnitt auf den ersten Hauptschnitt senkrecht projicirt werden, so wie

χ'_2 den Winkel, welchen die zwei Ebenen mit einander machen, wodurch die hintere Schwingungsrichtung und die Normale zum ersten Hauptschnitt auf den zweiten Hauptschnitt senkrecht projicirt werden; der Buchstabe

$\mathfrak{A}$ stellt die grösste durch die Lichtschwingungen verursachte Ausweichung der Aethertheilchen von ihrer Ruhelage vor mit Einrechnung ihrer durch die Trübung der Mittel bewirkten Verminderung und

Θ, Θ' sind zwei Grössen, durch welche die Phasenunterschiede bestimmt werden, die in den Schwingungen der vier Lichtantheile während ihres Durchgangs durch die Platten hervorgerufen worden sind.

XXXIII. Die Schwingungen dieser vier Lichtantheile geschehen sämmtlich in der vom hintern Polarisationsmittel geforderten Richtung, daher lassen sich dieselben in einen einzigen Wellenzug zusammensetzen auf dieselbe Weise, wie es in der ersten Hälfte dieser Abhandlung (Ziffer V.) bezüglich zweier Lichtantheile von der gleichen Beschaffenheit geschehen ist. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$(1.\ a)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \cos.F \cos.\varphi_2 = \mathfrak{A}_1, \\ \mathfrak{A}\cos.\varphi_1 \sin.F \sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2 = \mathfrak{A}_2, \\ \mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \sin.F \cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1 = \mathfrak{A}_3, \\ \mathfrak{A}\sin.\varphi_1 \cos.G \sin.\varphi_2 = \mathfrak{A}_4, \\ 2\pi\frac{vt-x}{\lambda} = \alpha\ ,\ 2\pi\Theta' = \beta'\ ,\ 2\pi\Theta = \beta, \end{array}\right.$$

so nehmen die Ausdrücke (2. c) der Ziffer XXX. die folgende einfachere Gestalt an:

$$\mathfrak{A}_1 \sin.\alpha \;,\; \mathfrak{A}_2 \sin.(\alpha+\beta') \;,\; \mathfrak{A}_3 \sin.(\alpha+\beta) \;;\; \mathfrak{A}_4 \sin.(\alpha+\beta'+\beta),$$

und diese gehen, wenn man die letzten drei Winkel als Summen einerseits von α und andererseits von β' oder β oder $\beta'+\beta$ ansieht, über in:

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_1 \sin.\alpha,\\ \mathfrak{A}_2 \cos.\beta' \sin.\alpha + \mathfrak{A}_2 \sin.\beta' \cos.\alpha,\\ \mathfrak{A}_3 \cos.\beta \sin.\alpha + \mathfrak{A}_3 \sin.\beta \cos.\alpha,\\ \mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta) \sin.\alpha + \mathfrak{A}_4 \sin.(\beta'+\beta) \cos.\alpha,\end{gathered}$$

und setzen sich nun durch Addition zu der einzigen Schwingungsform

$$[\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \cos.\beta' + \mathfrak{A}_3 \cos.\beta + \mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta)] \sin.\alpha$$
$$+ [\mathfrak{A}_2 \sin.\beta' + \mathfrak{A}_3 \sin.\beta + \mathfrak{A}_4 \sin.(\beta'+\beta)] \cos.\alpha$$

zusammen, welche, wenn man

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \cos.\beta' + \mathfrak{A}_3 \cos.\beta + \mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta) = \mathrm{A} \cos.\gamma \;,\\ \mathfrak{A}_2 \sin.\beta' + \mathfrak{A}_3 \sin.\beta + \mathfrak{A}_4 \sin.(\beta'+\beta) = \mathrm{A} \sin.\gamma\end{aligned}\right\} \quad (1.\ \mathrm{b.})$$

setzt, wird:

$$\mathrm{A} \sin.(\alpha+\gamma). \qquad (1.\ \mathrm{c.})$$

Aus den Gleichungen (1. b) lässt sich sowohl A wie γ finden, man erhält nämlich:

$$\mathrm{A}^2 = [\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \cos.\beta' + \mathfrak{A}_3 \cos.\beta + \mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta)]^2$$
$$+ [\mathfrak{A}_2 \sin.\beta' + \mathfrak{A}_3 \sin.\beta + \mathfrak{A}_4 \sin.(\beta'+\beta)]^2$$

und

$$\mathrm{tang.}\gamma = \frac{\mathfrak{A}_2 \sin.\beta' + \mathfrak{A}_3 \sin.\beta + \mathfrak{A}_4 \sin.(\beta'+\beta)}{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \cos.\beta' + \mathfrak{A}_3 \cos.\beta + \mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta)}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen liefert, wenn man ihre eckigen Klammern auflöst:

$$\mathrm{A}^2 = \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{A}_4^2 + 2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \cos.\beta' + 2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 \cos.\beta$$
$$+ 2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 \cos.(\beta'+\beta) + 2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 \cos.(\beta'-\beta) + 2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 \cos.\beta$$
$$+ 2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \cos.\beta',$$

und diese vorstehende Gleichung lässt sich sogleich in die andere Gestalt überführen:

$$(2.)\left\{\begin{array}{l} A^2 = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4)^2 - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)\, 4\sin^2.\tfrac{1}{2}\beta' \\ \qquad - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4)\, 4\sin^2.\tfrac{1}{2}\beta - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 . 4\sin^2.\tfrac{1}{2}(\beta' + \beta) \\ \qquad - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 . 4\sin^2.\tfrac{1}{2}(\beta' - \beta). \end{array}\right.$$

XXXIV. Um nun diese letzte Gleichung, in welcher A^2 die Lichtstärke des aus den vier Lichtantheilen (2. c.) der Ziffer XXX. zusammengesetzten einen Wellenzuges vorstellt, auf eine zur Beurtheilung der Gesammterscheinung geeignetere Form zu bringen, machen wir hier wieder Gebrauch von den vorhin (Ziffer XXV.) mitgetheilten Formeln, indem wir die Winkel, welche die verschiedenen Richtungen mit den Coordinatenaxen der x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen, auf folgende Weise bezeichnen:

durch a_1, b_1, c_1 die der vordern Schwingungsrichtung,
„ a_2, b_2, c_2 „ „ hintern „
„ a', b', c' die der Normale zum ersten Hauptschnitt,
„ a'', b'', c'' „ „ „ „ zweiten „
„ α_1, β_1, γ_1 die der senkrechten Projection von der vordern Schwingungsrichtung auf den ersten Hauptschnitt,
„ α_2, β_2, γ_2 die der senkrechten Projection von der hintern Schwingungsrichtung auf den zweiten Hauptschnitt.

Diesen Bezeichnungen zur Folge geben die oben (Ziffer XXV.) aufgestellten Gleichungen (1. d), wenn man einmal die vordere Schwingungsrichtung und die Normale zum zweiten Hauptschnitt als erste und zweite Richtung in Verbindung mit dem ersten Hauptschnitt als Projectionsebene bringt, und ein andermal die hintere Schwingungsrichtung und die Normale zum ersten Hauptschnitt in Verbindung mit dem zweiten Hauptschnitt, die folgenden Relationen an die Hand:

$$\sin.\varphi_1 \cos.\alpha_1 = \cos.a_1 - \cos.a' \cos.\varphi_1,$$
$$\sin.\varphi_1 \cos.\beta_1 = \cos.b_1 - \cos.b' \cos.\varphi_1,$$
$$\sin.\varphi_1 \cos.\gamma_1 = \cos.c_1 - \cos.c' \cos.\varphi_1,$$
$$\sin.\varphi_2 \cos.\alpha_2 = \cos.a_2 - \cos.a'' \cos.\varphi_2,$$
$$\sin.\varphi_2 \cos.\beta_2 = \cos.b_2 - \cos.b'' \cos.\varphi_2,$$
$$\sin.\varphi_2 \cos.\gamma_2 = \cos.c_2 - \cos.c'' \cos.\varphi_2;$$

multiplicirt man aber von diesen Gleichungen die 1. und 4., 2. und 5., 3. und 6. paarweise mit einander und nimmt man hierauf die Summe von den drei so entstehenden Productengleichungen und beachtet man, dass erstlich

$$\cos.\alpha_1 \cos.\alpha_2 + \cos.\beta_1 \cos.\beta_2 + \cos.\gamma_1 \cos.\gamma_2$$

der Cosinus des Winkels ist, den die senkrechte Projection der vordern Schwingungsrichtung auf den ersten Hauptschnitt mit der senkrechten Projection der hintern Schwingungsrichtung auf den zweiten Hauptschnitt macht, also desselben Winkels, der in den Ausdrücken (2. c) der Ziffer XXX. durch G bezeichnet worden ist; dass zweitens

$$\cos.a_1 \cos.a_2 + \cos.b_1 \cos.b_2 + \cos.c_1 \cos.c_2$$

der Cosinus des Winkels ist, den die vordere Schwingungsrichtung mit der hintern macht, welchen Winkel wir, wie schon in der frühern Abhandlung, durch $\varDelta$ bezeichnen werden; dass drittens

$$\cos.a' \cos.a'' + \cos.b' \cos.b'' + \cos.c' \cos.c''$$

der Cosinus des Winkels ist, den die Normalen zu den zwei Hauptschnitten mit einander machen, also desselben Winkels, der in den Ausdrücken (2. c) der Ziffer XXX. durch F vorgestellt worden ist; dass viertens

$$\cos.a_1 \cos.a'' + \cos.b_1 \cos.b'' + \cos.c_1 \cos.c''$$

der Cosinus des Winkels ist, den die vordere Schwingungsrichtung mit der Normale zum zweiten Hauptschnitt macht, welchen Winkel wir durch B''_1 bezeichnen wollen; dass endlich fünftens

$$\cos. a_2 \cos. a' + \cos. b_2 \cos. b' + \cos. c_2 \cos. c'$$

der Cosinus des Winkels ist, den die hintere Schwingungsrichtung mit der Normale zum ersten Hauptschnitt macht, welchen Winkel wir durch B'_2 bezeichnen wollen: so stossen wir unmittelbar auf die nachstehende Gleichung:

$$(1.\ a) \left\{ \begin{array}{l} \sin.\varphi_1 \sin.\varphi_2 \cos. G + \cos. B''_1 \cos.\varphi_2 + \cos. B'_2 \cos.\varphi_1 \\ \qquad = \cos. A + \cos.\varphi_1 \cos. F \cos.\varphi_2. \end{array} \right.$$

Es ist aber, der vorhin (Ziffer XXV.) aufgestellten Gleichung (2. g) zur Folge, wenn man die vordere Schwingungsrichtung und die Normale zum zweiten Hauptschnitt in Verbindung mit dem ersten Hauptschnitt als Projectionsebene betrachtet, weil φ_1 und F die Winkel sind, welche diese zwei Richtungen mit der Normale zur Projectionsebene bilden, χ''_1 der Winkel, den die zwei Ebenen mit einander machen, wodurch diese Richtungen auf die Projectionsebene senkrecht projicirt werden, und B''_1 der Winkel ist, den beide Richtungen unter sich einschliessen:

$$\cos. B''_1 = \cos.\varphi_1 \cos. F + \sin.\varphi_1 \sin. F \cos.\chi''_1,$$

und dieselbe Gleichung liefert noch, wenn man die hintere Schwingungsrichtung und die Normale zum ersten Hauptschnitt in Verbindung mit dem zweiten Hauptschnitt als Projectionsebene in's Auge fasst, weil dann φ_2 und F die Winkel sind, welche beide Richtungen mit der Normale zur Projectionsebene bilden, χ'_2 der Winkel, den die zwei Ebenen mit einander machen, wodurch diese Richtungen auf die Projectionsebene senkrecht projicirt werden, und B'_2 der Winkel ist, den beide Richtungen unter sich einschliessen:

$$\cos. B'_2 = \cos.\varphi_2 \cos. F + \sin.\varphi_2 \sin. F \cos.\chi'_2;$$

aus den letzten zwei Gleichungen aber findet man, dass

$$\begin{array}{l} \cos. B''_1 \cos.\varphi_2 + \cos. B'_2 \cos.\varphi_1 = 2 \cos.\varphi_1 \cos. F \cos.\varphi_2 \\ \qquad + \sin.\varphi_1 \sin. F \cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1 + \cos.\varphi_1 \sin. F \sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2 \end{array}$$

ist, und hierdurch geht die Gleichung (1. a) über in:

$$\cos.\varphi_1 \cos.\mathrm{F} \cos.\varphi_2 + \sin.\varphi_1 \sin.\mathrm{F} \cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1$$
$$+ \cos.\varphi_1 \sin.\mathrm{F} \sin.\varphi_2 \cos.\chi'_2 + \sin.\varphi_1 \cos.\mathrm{G} \sin.\varphi_2 = \cos.A,$$

welche mittelst der in XXXIII. stehenden Bezeichnungen (1. a) wird:

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A} \cos.A, \qquad (1.\ b)$$

und so zeigt, dass sich die Gleichung (2.) der vorigen Ziffer unter allen Umständen auch so schreiben lässt:

$$\mathrm{A}^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2.A - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)\, 4\sin^2.\tfrac{1}{2}\beta' - (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4)\, 4\sin^2.\tfrac{1}{2}\beta$$
$$- \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 \,.\, 4\sin^2.\tfrac{1}{2}(\beta' + \beta) - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 \,.\, 4\sin^2\tfrac{1}{2}(\beta' - \beta),$$

welche Gleichung, weil den Bezeichnungen (1. a) der Ziffer XXXIII. gemäss:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}^2 \sin.\mathrm{F} \cos.\mathrm{F} \sin.\varphi_2 \cos.\varphi_2 \Big(\cos^2.\varphi_1 \cos.\chi'_2$$
$$+ \frac{\cos.\mathrm{G}}{\cos.\mathrm{F}} \sin^2.\varphi_1 \cos.\chi''_1\Big),$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}^2 \sin.\varphi_1 \cos.\varphi_1 \sin.\mathrm{F} \cos.\mathrm{F} \Big(\cos^2.\varphi_2 \cos.\chi''_1$$
$$+ \frac{\cos.\mathrm{G}}{\cos.\mathrm{F}} \sin^2.\varphi_2 \cos.\chi'_2\Big),$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}^2 \sin.\varphi_1 \cos.\varphi_1 \cos.\mathrm{F} \cos.\mathrm{G} \sin.\varphi_2 \cos.\varphi_2,$$
$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}^2 \sin.\varphi_1 \cos.\varphi_1 \sin^2.\mathrm{F} \sin.\varphi_2 \cos.\varphi_2 \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2$$

ist, wenn man der Kürze halber

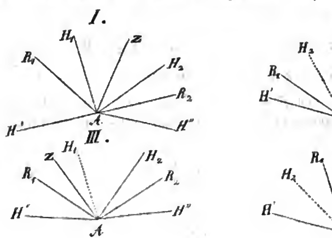
$$\left.\begin{aligned} \cos^2.\varphi_1 \cos.\chi'_2 + \frac{\cos.\mathrm{G}}{\cos.\mathrm{F}} \sin^2.\varphi_1 \cos.\chi''_1 &= \mathrm{M}, \\ \cos^2.\varphi_2 \cos.\chi''_1 + \frac{\cos.\mathrm{G}}{\cos.\mathrm{F}} \sin^2.\varphi_2 \cos.\chi'_2 &= \mathrm{N} \end{aligned}\right\} \qquad (2.\ a)$$

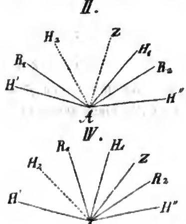
und zugleich für β' und β wieder $2\pi\Theta'$ und $2\pi\Theta$ den in (1. a) der Ziffer XXXIII. eingeführten Bezeichnungen gemäss setzt, die nachstehende Form annimmt:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}^2 = \mathfrak{A}^2 [&\cos^2.A - \mathrm{M} \sin.2\mathrm{F} \sin.2\varphi_2 \sin^2.\pi\Theta' \\ &- \mathrm{N} \sin.2\varphi_1 \sin.2\mathrm{F} \sin^2.\pi\Theta \\ &- \sin.2\varphi_1 \sin.2\varphi_2 \cos.\mathrm{F} \cos.\mathrm{G} \sin^2.\pi(\Theta' + \Theta) \\ &- \sin.2\varphi_1 \sin.2\varphi_2 \sin^2.\mathrm{F} \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2 \sin^2.\pi(\Theta' - \Theta)]. \end{aligned}\right\} \qquad (2.\ b)$$

XXXV. In dieser letzten Gleichung stellen Θ' und Θ dieselben Werthe vor, welche (Ziffer XXVIII.) durch die dortigen Gleichungen (1. a) und (1. c) gegeben worden sind, und da den in erwähnter Ziffer geschehenen Untersuchungen zur Folge jedem bestimmten Werthe von Θ' und Θ oder $\Theta'-\Theta$ eine Helligkeitscurve von besonderer Form entspricht, so sieht man ein, dass sich im Allgemeinen in zwei über einander liegenden Platten viererlei verschiedene Bilder sehen lassen müssen, von denen zwei aus dem Phasenunterschiede einer jeden Platte einzeln hervorgehen, die beiden andern dagegen ein Product der Ineinanderwirkung beider Platten sind. Die relative Lichtstärke dieser vier Bilder ist mit den Grössen φ_1, φ_2, F, G, χ''_1, χ'_2, M und N einem steten Wechsel unterworfen, dessen Art und Weise sich indessen nur mit groser Schwierigkeit aus der Gleichung (2. b) in voriger Ziffer erkennen lässt, wenn man diese nicht zuvor mehr in's Besondere zieht. Vor allem aber müssen wir erwägen, dass die Grösse G in einer bestimmten Abhängigkeit zu der F und den Ebenenwinkeln χ''_1 und χ'_2 steht, welche Abhängigkeit wir jetzt noch untersuchen werden.

Stellen in den Figuren I., II., III., IV. AH_1 und AH_2 die Normalen zum ersten und zweiten Hauptschnitt vor, AR_1 und AR_2 die





vordere und hintere Schwingungsrichtung, ferner AH′ und AH″ die Durchschnitte einerseits der durch AR_1 und AH_1 gelegten Ebene mit dem ersten Hauptschnitt und andererseits der durch AR_2 und AH_2 gelegten Ebene mit dem zweiten Hauptschnitt, bezeichnet endlich in allen diesen Figuren *AZ* den Durchschnitt der nöthigenfalls verlängerten Ebenen H_1AH' und H_2AH'' und zwar die I. für den Fall, dass dieser Durchschnitt ausserhalb der beiden Winkel, die II. für den Fall, dass der Durchschnitt innerhalb der beiden Winkel liegt, die III. oder IV. für den Fall, dass genannter Durchschnitt innerhalb des Winkels H_1AH' und ausserhalb des H_2AH'' oder innerhalb des H_2AH'' und ausserhalb des H_1AH' liegt, so bilden in jedem dieser besondern Fälle die Richtungen AZ, AH_1 und AH_2 ein sphärisches Dreieck, während die Richtungen AZ, AH′ und AH″ ein anderes sphärisches Dreieck bilden. Der an der Kante *AZ* anliegende Flächenwinkel ist in diesen beiden sphärischen Dreiecken derselbe in Fig. I., in Fig. II. hingegen ist der des einen Dreiecks der Scheitelwinkel von dem im andern und desshalb doch wieder in beiden Dreiecken der gleiche; in den Figuren III. und IV. aber ist er im einen Dreieck der Nebenwinkel von dem im andern Dreieck. Bezeichnen wir demnach jedesmal den an der Kante *AZ* anliegenden Flächenwinkel des aus den Richtungen *AZ*, AH_1, AH_2 zusammengesetzten sphärischen Dreiecks durch Δ, so ist in den Fällen I. und II. der an der gleichen Kante *AZ* anliegende Flächenwinkel in dem aus den Richtungen *AZ*, AH′, AH″ gebildeten sphärischen Dreiecke ebenfalls Δ, hingegen $180^0 - \Delta$ in den Fällen III. und IV. In dem aus den Richtungen *AZ*, AH_1, AH_2 zusammengesetzten sphärischen Dreiecke steht dem Winkel Δ die Seite H_1AH_2 oder, unsern bisherigen Bezeichnungen gemäss der Winkel F gegenüber; und weil in jedem sphärischen Dreiecke die Sinuse der Seiten sich zu einander verhalten, wie die Sinuse der ihnen gegenüber liegenden Winkel, so finden in ihm die folgenden Relationen statt:

$$\sin. F : \sin. ZAH_1 : \sin. ZAH_2 = \sin. \Delta : \sin. \chi'_2 : \sin. \chi''_1 ; \qquad (1.\ a)$$

denn den Seiten ZAH_1 und ZAH_2 stehen in unserm Dreiecke die Winkel gegenüber, welche bei ersteren von den Ebenen ZAH_2 und H_1AH_2, beim andern von denen ZAH_1 und H_1AH_2 eingeschlossen werden, und es liegen die Ebenen ZAH_1 und ZAH_2 in denen, wodurch die Richtung AR_1 auf den ersten Hauptschnitt und die AR_2 auf den zweiten Hauptschnitt senkrecht projicirt werden, während die Ebene H_1AH_2 sowohl der angehört, wodurch die Richtung AH_2 auf den ersten Hauptschnitt, als auch der, wodurch die Richtung AH_1 auf den zweiten Hauptschnitt senkrecht projicirt wird. Es sind mithin die den Seiten ZAH_1 und ZAH_2 gegenüber liegenden Winkel unsers sphärischen Dreiecks genau die gleichen, welche oben durch χ'_2 und χ''_1 bezeichnet worden sind, mit der Einschränkung jedoch, dass der der Seite ZAH_1 gegenüber liegende Flächenwinkel der Nebenwinkel von dem χ'_2 ist im Falle der Fig. I. oder III., dagegen der Winkel χ'_2 selber im Falle der Figur II. oder IV., und dass der der Seite ZAH_2 gegenüber liegende Flächenwinkel der Nebenwinkel von dem χ''_1 ist im Falle der Figur I. oder IV., hingegen dem χ''_1 selber gleich ist im Falle der Figur II. oder III., was indessen auf die Gleichungen (1. a) keinen Einfluss hat. Aus diesen ergiebt sich daher in jedem Falle

(1. b) $$\sin.ZAH_1 = \frac{\sin.F \sin.\chi'_2}{\sin.\varDelta} \text{ und } \sin.ZAH_2 = \frac{\sin.F \sin.\chi''_1}{\sin.\varDelta}.$$

In demselben sphärischen Dreiecke giebt die sphärische Trigonometrie noch die folgenden zwei Relationen an die Hand, erstlich die:

(1. c.) $$\cos.F = \cos.ZAH_1 \cos.ZAH_2 + \sin.ZAH_1 \sin.ZAH_2 \cos.\varDelta$$

zwischen den drei Seiten und dem Winkel $\varDelta$, und zweitens die:

(1. d) $$\cos.\varDelta = \sin.\chi''_1 \sin.\chi'_2 \cos.F \pm \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2$$

zwischen den drei Winkeln und der Seite F, in welch letzterer das obere Vorzeichen im Falle der Figur I. oder II., hingegen im Falle der Figur III. oder IV. das untere Vorzeichen genommen werden muss, wie aus dem vor der Gleichung (1. b) angegebenen Verhalten zwischen den

Winkeln unsers sphärischen Dreiecks und denen χ'_2 und χ''_1 sogleich hervorgeht. — Betrachten wir jetzt das aus den Richtungen AZ, AH′, AH″ gebildete sphärische Dreieck, so liefert dieses, weil $H'AH'' = G$ ist:

$$\cos. G = \cos. ZAH' . \cos. ZAH'' \pm \sin. ZAH' . \sin. ZAH'' \cos. \Delta, \quad (2.)$$

wo von dem doppelten Vorzeichen das obere im Falle der Figur I. oder II., hingegen das untere im Falle der Figur III. oder IV. genommen werden muss, weil der der Seite G gegenüber liegende Winkel in den beiden ersten Fällen dem Δ gleich, dagegen in den beiden andern Fällen der Nebenwinkel von Δ ist, wie vor der Gleichung (1. a) gezeigt worden ist. Es ist aber in der Figur I. oder IV. $ZAH' = 90^0 + ZAH_1$, und in der Figur II. oder III. $ZAH' = 90^0 - ZAH_1$ und ebenso ist in Figur I. oder III. $ZAH'' = 90^0 + ZAH_2$, dagegen in Figur II. oder IV. $ZAH'' = 90^0 - ZAH_2$, also ist im Falle von Figur I.:

$$\sin. ZAH' = \cos. ZAH_1 \quad , \quad \cos. ZAH' = -\sin. ZAH_1$$

und

$$\sin. ZAH'' = \cos. ZAH_2 \quad , \quad \cos. ZAH'' = -\sin. ZAH_2 ;$$

im Falle der Figur II.:

$$\sin. ZAH' = \cos. ZAH_1 \quad , \quad \cos. ZAH' = \sin. ZAH_1$$

und

$$\sin. ZAH'' = \cos. ZAH_2 \quad , \quad \cos. ZAH'' = \sin. ZAH_2 ;$$

im Falle der Figur III.:

$$\sin. ZAH' = \cos. ZAH_1 \quad , \quad \cos. ZAH' = \sin. ZAH_1$$

und

$$\sin. ZAH'' = \cos. ZAH_2 \quad , \quad \cos. ZAH'' = -\sin. ZAH_2 ;$$

endlich im Falle der Figur IV.:

$$\sin. ZAH' = \cos. ZAH_1 \quad , \quad \cos. ZAH' = -\sin. ZAH_1$$

und

$$\sin. ZAH'' = \cos. ZAH_2 \quad , \quad \cos. ZAH'' = \sin. ZAH_2 .$$

Hieraus folgt, dass in allen 4 Figuren immer

(3. a) $$\sin. ZAH' \sin. ZAH'' = \cos. ZAH_1 \cos. ZAH_2$$

ist, so wie

(3. b) $$\cos. ZAH' \cos. ZAH'' = \pm \sin. ZAH_1 \sin. ZAH_2,$$

wo von dem doppelten Vorzeichen das obere genommen werden muss im Falle der Figur I. oder II., das untere dagegen im Falle der Figur III. oder IV., also in den gleichen Fällen, wo auch in der Gleichung (2.) das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muss. Aus diesem Grunde geht die Gleichung (2.) mittelst derer (3. a) und (3. b) über in:

$$\pm \cos. G = \sin. ZAH_1 \sin. ZAH_2 + \cos. ZAH_1 \cos. ZAH_2 \cos. \varDelta,$$

in welcher das obere Vorzeichen im Falle der Figur I. oder II., das untere im Falle der Figur III. oder IV. genommen werden muss. Setzt man in dieser letzten Gleichung den Gleichungen (1. b) gemäss:

$$\sin. ZAH_1 \sin. ZAH_2 = \frac{\sin^2. F \sin. \chi''_1 \sin. \chi'_2}{\sin^2. \varDelta}$$

und der Gleichung (1. c) gemäss:

$$\cos. ZAH_1 \cos. ZAH_2 = \cos. F - \sin. ZAH_1 \sin. ZAH_2 \cos. \varDelta$$

oder mit Rücksicht auf die vorige:

$$\cos. ZAH_1 \cos. ZAH_2 = \cos. F - \frac{\sin^2. F \sin. \chi''_1 \sin. \chi'_2 \cos. \varDelta}{\sin^2. \varDelta},$$

so wird sie:

$$\pm \cos. G = \sin^2. F \sin. \chi''_1 \sin. \chi'_2 + \cos. F \cos. \varDelta$$

und diese verwandelt sich, wenn man in sie für $\cos. \varDelta$ seinen Werth aus der Gleichung (1. d) einsetzt, in:

(4.) $$\pm \cos. G = \sin. \chi''_1 \sin. \chi'_2 \mp \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \cos. F,$$

wo wieder von den doppelten Vorzeichen die obern oder untern genommen werden müssen, je nachdem es sich um eine der Figuren I. und II. oder um eine der Figuren III. und IV. handelt.

XXXVI. Bis hierher haben wir alle Formeln mit theoretischer Strenge aus den in zwei übereinander liegenden Krystallplatten gebildeten vier Lichtantheilen hergeleitet; von jetzt an aber werden wir zur Vereinfachung der Gleichung (2. b) in Ziffer XXXIV. diejenigen Abkürzungen eintreten lassen, welche, ohne den Charakter der in zwei übereinander liegenden Krystallplatten, deren optische Axen einen beträchtlichen Winkel mit den Normalen zu ihren Oberflächen machen, auftretenden Erscheinung merklich zu beeinträchtigen, den Inhalt jener Gleichung leichter überschauen lassen. Hierzu bietet uns die Form der Gleichung (4.) in voriger Ziffer die Gelegenheit dar. Die Winkel χ''_1 und χ'_2 sind beide von derselben Art wie der χ in der ersten Hälfte dieser Abhandlung, von welchem dort erwiesen worden ist, dass er ein kleines der ersten Ordnung in Bezug auf sin. i oder eigentlich in Bezug auf $\frac{\sin. i}{\sin. a}$ ist; demnach ist $\sin.\chi''_1 \sin.\chi'_2$ ein kleines der zweiten Ordnung in Bezug auf $\frac{\sin. i}{\sin. a}$, welches wir unbedenklich vernachlässigen können in allen den Fällen, wo $\frac{\sin. i}{\sin. a}$ ein kleiner echter Bruch ist. Vernachlässigen wir aber das Product $\sin.\chi''_1 \sin.\chi'_2$ in der Gleichung (4.) zu Ende der vorigen Ziffer, so wird sie:

$$\cos. G = -\cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2 \cos. F \qquad (1.\ a)$$

und giebt

$$\frac{\cos. G}{\cos. F} = -\cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2, \qquad (1.\ b)$$

wodurch die in den Gleichungen (2. a) der Ziffer XXXIV. definirten Grössen M und N werden:

$$\cos.\chi'_2 (\cos^2.\varphi_1 - \sin^2.\varphi_1 \cos^2.\chi''_1) = M$$

und

$$\cos.\chi''_1 (\cos^2.\varphi_2 - \sin^2.\varphi_2 \cos^2.\chi'_2) = N.$$

Nun ist aber $\cos^2.\chi''_1$ sowohl wie $\cos^2.\chi'_2$ von 1 nur um eine Grösse der zweiten Ordnung in Bezug auf $\frac{\sin. i}{\sin. a}$ verschieden, darum

können wir diese Quadrate mit demselben Rechte gleich 1 setzen, mit welchem wir so eben das Product $\sin.\chi''_1 \sin.\chi'_2$ vernachlässigt haben, und dann nehmen die zuletzt angegebenen Werthe von M und N die folgende Gestalt an:

$$(1.\ c)\qquad \cos.2\varphi_1 \cos.\chi'_2 = M \text{ und } \cos.2\varphi_2 \cos.\chi''_1 = N.$$

Zufolge dieser Werthe von M und N und des von G in der Gleichung (1. b) angegebenen verwandelt sich nun die Gleichung (2. b) in Ziffer XXXIV. in:

$$(2.)\quad \begin{cases} A^2 = \mathfrak{A}^2 [\cos^2.A - \cos.2\varphi_1 \sin.2F \sin.2\varphi_2 \cos.\chi'_2 \sin^2.\pi\Theta' \\ \qquad - \sin.2\varphi_1 \sin.2F \cos.2\varphi_2 \cos.\chi''_1 \sin^2.\pi\Theta \\ + \sin.2\varphi_1 \sin.2\varphi_2 \cos^2.F \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2 \sin^2.\pi(\Theta' + \Theta) \\ \qquad - \sin.2\varphi_1 \sin.2\varphi_2 \sin^2.F \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2 \sin^2.\pi(\Theta' - \Theta). \end{cases}$$

Bei dem Gebrauche dieser Gleichung darf man nicht übersehen, dass sie nur so lange Sicherheit gewährt, als die optischen Axen in den Platten mit der Normale zu ihren Oberflächen einen beträchtlich grossen Winkel machen, der bei einem Gesichtsfelde des Polarisationsinstruments von 10 Graden immerhin 25° erreichen darf, wenn eine Ungleichförmigkeit der Beleuchtung im Gesichtsfelde nicht Befremden erregen soll. Die besondere Behandlung solcher Platten, deren optische Axen nicht bedeutend von der senkrechten Lage zu ihren Oberflächen abweichen, bleibt also hier, wie schon in der ganzen frühern Abhandlung, noch ein pium desiderium. Bezüglich derjenigen Platten aber, deren optische Axen einen Winkel mit der Normale zu ihren Oberflächen machen, der über die Gränzen von 25° und 90° nicht hinaus geht, giebt sie über alle einzelnen Punkte vollkommen befriedigenden Aufschluss unter dem Vorbehalt freilich, dass sich in sie kein Rechnungsfehler eingeschlichen habe, was allerdings kein gar zu grosses Wunder wäre.

XXXVII. Die Gleichung (2. b) der Ziffer XXXIV. in Verbindung mit den Gleichungen der Ziffer XXVIII. enthalten alle möglichen in zwei übereinander liegenden Platten sich bildenden Erscheinungen in voller Allgemeinheit in sich und man kann anstatt der ersterwähnten Gleichung auch die (2.) der vorigen Nummer nehmen, wenn beide Platten so beschaffen sind, dass deren optische Axen von der senkrechten Lage zu ihren Oberflächen um mehr als 25° abweichen. In diesem Falle weichen $\cos^2.\chi''_1$ und $\cos^2.\chi'_2$ von 1 nur um eine Grösse der zweiten Ordnung in Bezug auf $\frac{\sin. i}{\sin. a}$ ab, und man könnte daher ohne Furcht vor einem möglichen Fehler sowohl $\cos^2.\chi''_1 = 1$ als $\cos^2.\chi'_2 = 1$ setzen, wodurch die Gleichung (2.) der vorigen Ziffer eine etwas einfachere Gestalt annähme. Gleichwohl habe ich es vorgezogen, in dieser Gleichung jene Cosinuse stehen zu lassen, weil durch diese der Vorzeichenwechsel in den einzelnen Gliedern der Gleichung bestimmt wird, und hiervon der Umstand abhängt, ob solche Stellen, an welchen zwei oder mehrere von den vier Bildern übereinander greifen, sich gegenseitig verdunkeln oder aufhellen. Um das Vorzeichen zu erkennen, welches diese Cosinuse bei den verschiedenen einfallenden Lichtstrahlen annehmen, muss man zu den Betrachtungen der Ziffer XXV. zurückkehren, wo bei der dortigen Gleichung (2. g) erinnert worden ist, dass χ und ψ'_1 oder ψ'_2 immer gleichzeitig spitz oder stumpf genommen werden müssen, was nichts anders sagen will, als dass die den Winkel χ bildenden projicirenden Ebenen stets von der Normale zur Projectionsebene auslaufend gedacht werden müssen. Diesem gemäss wird $\cos.\chi''_1$ jedesmal sein Vorzeichen ändern, wenn in den Configurationen I. bis IV. der Ziffer XXXV. der durch die von AH_1 auslaufend gedachten Ebenen H_1AH_2 und H_1AH' gebildete Winkel aus einem spitzen Zustand in einen stumpfen, oder aus diesem in jenen übergeht. Ebenso wird $\cos.\chi'_2$ das Vorzeichen + oder — annehmen, je nachdem die von AH_2 auslaufend gedachten Ebenen H_2AH_1 und H_2AH'' einen

spitzen oder stumpfen Winkel mit einander machen. Fügt man hierzu noch, dass den verschiedenen auf die Krystallplatten auffallenden Lichtstrahlen verschiedene Hauptschnitte zukommen, und dass in Folge dessen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes verschiedene von den Configurationen I. bis IV. sich geltend machen, so überzeugt man sich, dass $\cos.\chi''_1$ und $\cos.\chi'_2$ rings um die Mitte des Gesichtsfeldes herum einem periodischen Wechsel ihrer Vorzeichen unterliegen, wobei ihr absoluter Werth doch stets nahehin derselbe bleibt. Diesem entsprechend hat man sich die Glieder der Gleichung (2.) in voriger Ziffer so vorzustellen, als ob ihr absoluter Werth abgesehen von den Grössen $\cos.\chi''_1$ und $\cos.\chi'_2$ gegeben wäre, dass jedoch diese Werthe von Strecke zu Strecke ihr Vorzeichen den Grössen $\cos.\chi''_1$ und $\cos.\chi'_2$ gemäss in das entgegengesetzte überspringen lassen. Dieser Wechsel der Vorzeichen steht jedoch mit der eigentlichen Erscheinung nur in einem losern Zusammenhange, weshalb wir ihn bei den noch folgenden Betrachtungen ganz ausser Acht lassen werden.

Indem wir aber jetzt noch einige der Hauptfälle von zwei über einander liegenden Krystallplatten in ausführlichere Betrachtung ziehen werden, müssen wir auf eine andere Eigenthümlichkeit der Gleichung (2.) in voriger Ziffer aufmerksam machen, die ebenfalls aus der besondern Natur der Winkel χ''_1 und χ'_2 ihren Ursprung nimmt. Es geht schon aus den in der ersten Hälfte dieser Abhandlung (Ziffer IX.) aufgestellten Relationen hervor, dass da, wo man einen Fehler der ersten Ordnung in Bezug auf $\frac{\sin.i}{\sin.a}$ nicht zu scheuen hat, statt der Winkel, welche die Schwingungsrichtungen vor und hinter einer Krystallplatte von der hier vorausgesetzten Art mit der Normale zu ihrem Hauptschnitt machen, immer auch die Azimuthe der zu diesen Schwingungsrichtungen gehörigen Polarisationsebenen zu der Hauptnormalebene der Platte genommen werden können; denn es ist den dortigen Gleichungen (3. b) gemäss:

$$\varphi_1 = \omega_1 + \mu \text{ und } \varphi_2 = \omega_1 + \mu + 180^\circ - \mathit{\Delta}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (7. a) der Ziffer VIII.

$$\varphi_1 = \omega_1 + \mu \text{ und } \varphi_2 = \omega_2 + \mu.$$

Es ist aber in jener Ziffer IX. dargethan worden, dass

$$\sin.\mu = \cot a \sin.\omega \sin.i \text{ oder } \sin.\mu = \cos.a \sin.\omega \frac{\sin.i}{\sin.a}$$

ist; vernachlässigt man daher dieses Kleine der ersten Ordnung in Bezug auf $\frac{\sin.i}{\sin.a}$, so hat man:

$$\varphi_1 = \omega_1 \text{ und } \varphi_2 = \omega_2.$$

Bezeichnen hier ω_1 und ω_2 die Azimuthe der vordern und hintern Polarisationsebenen zu den Hauptnormalebenen der ersten und zweiten von den übereinander liegenden Krystallplatten und stellt ω_0 das Azimuth zwischen den Hauptnormalebenen dieser beiden Platten vor, so folgt auf gleiche Weise, dass man unter den entsprechenden Voraussetzungen an die Stelle der Winkel φ_1, φ_2 und F in der Gleichung (2) der vorigen Ziffer die ω_1, ω_2 und ω_0 setzen könne, wodurch dieselbe wird:

$$\left.\begin{aligned}
A^2 &= \mathfrak{A}^2 . \cos^2 . \mathit{\Delta} \\
&- \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \sin. 2\omega_0 . \cos. 2\omega_2 \cos. \chi''_1 \sin^2 . \pi\Theta \\
&- \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_2 . \sin. 2\omega_0 . \cos. 2\omega_1 \cos. \chi'_2 \sin^2 . \pi\Theta' \\
&- \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \sin^2 . \omega_0 . \sin. 2\omega_2 . \cos. \chi''_1 . \cos. \chi'_2 \sin^2 . \pi(\Theta' - \Theta) \\
&+ \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \cos^2 . \omega_0 . \sin. 2\omega_2 \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2 . \pi(\Theta' + \Theta)
\end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

und nun den zur leichtern Auffassung der einzelnen Bilder grossen Vortheil in sich aufgenommen hat, dass die meisten der in ihr auftretenden Grössen im ganzen Umfange eines und desselben angeschauten Bildes unveränderlich sind.

Setzt man in dieser Gleichung zu grösserer Bequemlichkeit:

$$(2.\ a)\ \begin{cases} \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_0 \cos. 2\omega_2 = T_1 , \\ \mathfrak{A}^2 . \cos. 2\omega_1 \sin. 2\omega_0 \sin. 2\omega_2 = T_2 , \\ \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 \sin^2 . \omega_0 . \sin. 2\omega_2 = T_3 , \\ \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \cos^2 . \omega_0 \sin. 2\omega_2 = T_4 , \end{cases}$$

so nimmt sie die folgende Form an:

$$(2.\ b)\ \begin{cases} A^2 = \mathfrak{A}^2 . \cos^2 . \mathcal{A} - T_1 . \cos. \chi''_1 . \sin^2 . \pi\Theta - T_2 . \cos. \chi'_2 . \sin^2 . \pi\Theta' \\ - T_3 . \cos. \chi''_1 . \cos. \chi'_2 \sin^2 . \pi(\Theta' - \Theta) + T_4 . \cos. \chi''_1 . \cos. \chi'_2 \\ . \sin^2 . \pi(\Theta' + \Theta). \end{cases}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Grössen Θ, Θ', $\Theta'-\Theta$, und $\Theta'+\Theta$ sind dieselben, welche schon oben (Ziffer XXVIII.) gegeben worden sind, und es enthalten daher die beiden vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit denen der Ziffer XXVIII. alles, was in Bezug auf Form und Beleuchtungsart der in zwei übereinander liegenden Krystallplatten von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit entstehenden Bilder sich aussagen lässt. Die vorstehende Gleichung (2. b) giebt noch, wie die gleichnamige, alle möglichen Krystallplatten umfassende und eben so bezeichnete der Ziffer XXXIV. zu erkennen, dass allgemein genommen in zwei übereinander liegenden Krystallplatten vier Bilder zum Vorschein kommen können, die jedoch namentlich bei Platten der hier betrachteten Art häufig in ein einziges übergehen, wie wir sogleich in einigen besondern Fällen zeigen werden. Zuvor aber bemerken wir noch, dass

$$(2.\ c)\qquad \mathcal{A} = \omega_1 + \omega_0 + \omega_2$$

ist, wenn $\mathcal{A}$ den Winkel bezeichnet, den die beiden Polarisationsebenen mit einander machen und ω_1, ω_0, ω_2 die Azimuthe in der Aufeinanderfolge von der vordern Polarisationsebene zur Hauptnormalebene der ersten Platte, von dieser zur Hauptnormalebene der zweiten Platte, von dieser letztern zur hintern Polarisationsebene vorstellen, und man übereinkommt, diejenigen von diesen Azimuthen als entgegengesetzte Grössen in die Rechnung einzuführen, welche man bei der angezeigten Auf-

einanderfolge in entgegengesetzten Richtungen zu durchlaufen hat; es springt dann die allgemeine Richtigkeit der Gleichung (2. c) von selbst in die Augen.

XXXVIII. Fassen wir als Beispiel zur Anwendung der in Ziffer XXXVII. erhaltenen Gleichungen erstens den besondern Fall in's Auge, wo beide Platten aus demselben einaxigen Krystall geschnitten worden sind, und deren Oberflächen einerlei Neigung zur optischen Axe erhalten haben, und denken wir uns diese beiden Platten so übereinander gelegt, dass die optischen Axen in beiden mit einander parallel laufen und in Folge dessen die Hauptnormalebenen beider Platten in einander liegen, so dass hier $\omega_0 = o$, also $\sin.\omega_0 = o$ und $\cos.\omega_0 = 1$ wird, dann geben jetzt die Gleichungen (2. a) der vorigen Ziffer:

$$T_1 = o \;,\; T_2 = o \;,\; T_3 = o \text{ und } T_4 = \mathfrak{A}^2 .\sin.2\omega_1 \sin.2\omega_2 ,$$

wodurch die dortige Gleichung (2. b) übergeht in:

$$A^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2.\varDelta + \mathfrak{A}^2 \sin.2\omega_1 \sin.2\omega_2 \cos.\chi''_1 \cos.\chi'_2 \sin^2.\pi(\Theta' + \Theta) \quad (1.)$$

und in dieser Form zu erkennen giebt, dass in diesem Falle nur ein einziges Bild vorhanden ist.

Die Formen der in diesem Bilde enthaltenen Helligkeitscurven ergeben sich aus den Gleichungen der Ziffer XXVIII., wenn man in Betrachtung zieht, dass hier, wo beide Platten aus demselben Krystall unter einerlei Schiefe zur optischen Axe geschnitten worden sind, $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$ und $D' = D$ ist, und dass man noch überdies, weil die Hauptnormalebenen beider Platten in einander liegen, im gegenwärtigen Falle $\omega' = \omega$ zu setzen habe, wodurch die dortige Gleichung (1. a)

$$\Theta = \frac{T}{v}(C + D \sin.i \cos.\omega + B \sin^2.i \sin^2.\omega + A \sin^2.i \cos^2.\omega), \quad (2.\ a)$$

so wie die dortige (1. c)

$$\Theta' = \frac{T'}{v}(C + D \sin.i \cos.\omega' + B \sin^2.i \sin^2.\omega' + A \sin^2.i \cos^2.\omega') \quad (2.\ b)$$

wird, und die Summe dieser beiden giebt; weil hier $\omega' = \omega$ ist,

$$(2.\ c)\qquad \Theta + \Theta' = \frac{T' + T}{v}(C + D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega),$$

welche letztere die Helligkeitscurven des in unserm jetzigen Falle sich zeigenden einen Bildes in sich trägt. Da diese letztere Gleichung dieselbe ist wie die zur ersten Platte gehörige (2. a), wenn man in dieser $T + T'$ für T und $\Theta + \Theta'$ für Θ setzt, so geht hieraus hervor, *dass zwei aus demselben einaxigen Krystall geschnittene Platten, deren Oberflächen die gleiche Neigung zur optischen Axe erhalten haben, genau dieselben Helligkeitscurven zeigen, wie eine einzige solche Platte, wenn die Dicke dieser einen die Summe von den Dicken jener beiden ist, und jene so übereinander gelegt werden, dass die optischen Axen in beiden mit einander parallel laufen.*

Auch die Lichtstärke der Curven ist in beiden Fällen die gleiche, aber es ist nicht so ganz leicht mittelst der Gleichungen der Ziffer XXXVII. zu dieser Einsicht zu gelangen, weil hier der in Ziffer XXV. hinter der Gleichung (2. g) besprochene besondere Fall eintritt, wo $\cos. \chi''_1$ sowohl als $\cos. \chi'_2$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, und jene Rechnungen aus diesem Grunde im jetzigen Ausnahmsfalle eine ihm entsprechende Umgestaltung verlangen. Aber schon ohne diese ziemlich weitläufige Umgestaltung der Rechnung zu unternehmen, lässt sich blos aus der allgemeinsten Kenntniss von dem Gange des Lichts durch Krystalle hindurch der Schluss ziehen, dass jeder aus der ersten Platte hervorgehende Lichtantheil bei seinem Uebergang in die zweite mit der ersten völlig gleichliegende Platte sich nicht weiter in zwei Bündel zerlegen kann, sondern in derselben Weise schwingend wie in der ersten Platte seinen Weg durch die zweite mit unveränderter Richtung fortsetzen muss, und diess zieht nach sich, dass aus der zweiten Platte zwei Lichtantheile völlig unter den gleichen Umständen hervortreten, wie aus einer einzigen solchen Platte, deren Dicke die Dicken jener beiden in sich enthielte. Dann aber muss auch das nach erfolgter Polarisation sich ergebende Inter-

ferenzresultat in beiden Fällen dasselbe seyn. Man überzeugt sich so auf indirecte Weise durch Vergleichung der Gleichung (1.) mit der in Ziffer VIII. für eine einzige Platte erhaltenen (6. b), dass das Product der beiden im gegenwärtigen Falle unbestimmt werdenden Grössen $\cos.\chi''_1$ und $\cos.\chi'_2$ durch $-\cos.\chi$ ersetzt werden muss, wo χ dieselbe Bedeutung wie in Ziffer VIII. hat.

XXXIX. Als zweites Beispiel zur Anwendung der in Ziffer XXXVII. erhaltenen Gleichungen wählen wir den besondern Fall, wo die in voriger Ziffer behandelten Platten, für welche die daselbst stehenden Gleichungen (2. a) und (2. b) Gültigkeit haben, so übereinander gelegt worden sind, dass deren Hauptnormalebenen zwar noch immer mit einander parallel laufen, aber nach entgegengesetzten Seiten von der beiden Platten gemeinschaftlichen Normale hin liegen, so dass deren optische Axen jetzt nicht mehr gleichlaufend sind. In diesem Falle ist $\omega_0 = 180^0$, es wird daher wieder $\sin.\omega_0 = 0$ und auch $\sin.2\omega_0 = 0$, dagegen wird zwar $\cos.\omega_0 = -1$, was jedoch immer noch $\cos^2.\omega_0 = 1$ nach sich zieht; desshalb zieht sich die Gleichung (1.) der Ziffer XXXVII. im jetzigen Falle doch wieder genau auf die Gleichung (1.) der vorigen Ziffer zurück, was zu erkennen giebt, dass das Hervortreten der Figuren in beiden Fällen bei gleicher Stellung der beiden Polarisationsebenen zu einander und der Hauptnormalebene zu ihnen mit gleicher Stärke geschicht.

Um die Gleichungen der im jetzigen Falle sich erzeugenden Helligkeitscurven zu erhalten, hat man blos die Gleichungen (2. a) und (2. b) der vorigen Ziffer, welche hier gleich anwendbar bleiben, zu addiren und zu beachten, dass jetzt, wo $\omega_0 = 180^0$ ist, $\omega' = \omega \pm 180^0$, also $\sin.\omega' = -\sin.\omega$ und $\cos.\omega' = -\cos.\omega$ wird. So erhält man als Summe die folgende Gleichung:

$$(1.) \left\{ \begin{aligned} (\Theta + \Theta')v = & C(T + T') + D \sin. i \cos. \omega (T - T') \\ & + B \sin^2. i \sin^2. \omega (T + T') + A \sin^2. i \cos^2. \omega (T + T'). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung, allgemein genommen, enthält noch Helligkeitscurven von allen den Formen in sich, welche möglicherweise in einer einzigen einaxigen Krystallplatte auferstehen können; lässt man aber in ihr $T' = T$ werden, d. h. giebt man den beiden übereinander liegenden Platten einerlei Dicke, so verwandelt sich dieselbe in:

$$(2.\ a) \quad (\Theta + \Theta')\frac{v}{2T} = C + B. \sin^2. i. \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega,$$

oder, wenn man wieder auf die gewohnte Weise

$$\sin. i. \sin. \omega = y \text{ und } \sin. i. \cos. \omega = x$$

setzt in:

$$(2.\ b) \quad (\Theta + \Theta')\frac{v}{2T} = C + By^2 + Ax^2,$$

und zeigt in dieser Form, *dass zwei gleich dicke, aus einem und demselben einaxigen Krystall unter gleicher Schiefe zur optischen Axe geschnittene Platten, wenn sie so übereinander gelegt werden, dass deren Hauptnormalebenen mit einander parallel laufen, deren optische Axen aber nicht, nur ein System von concentrischen Mittelpunktscurven liefern können, dessen Mittelpunkt die Mitte des Gesichtsfeldes ist.* Die im Eingange dieser Abhandlung beschriebene Erscheinung, welche Anlass zu dieser Arbeit gab, aber schon von Langberg erkannt worden war, ist in diesem Satze als ein besonderer Fall enthalten.

Die vorstehende Gleichung (2. b) schliesst noch einen andern besondern Fall in sich, den wir unsern Lesern nicht vorenthalten dürfen, weil er im ganzen Gebiete der optischen Krystallerscheinungen einzig in seiner Art dasteht. Es ist aus unsern Untersuchungen in der ersten Hälfte dieser Abhandlung hervorgegangen, dass sich in einer einzigen einaxigen Krystallplatte keine wahrhaft geraden Helligkeitsbänder sehen lassen können, dass vielmehr, was man bisher unter diesem Namen vor-

zuzeigen pflegte, nur Theile von Ellipsen oder von Hyperbeln unter solchen Umständen waren, wobei ein nicht sehr aufmerksames Auge leicht dahin gebracht werden konnte, solche Curvenstücke mit geraden Linien zu verwechseln; was aber bei einer einzigen Platte noch unmöglich war, können unsere jetzigen beiden übereinander liegenden Platten in höchster Vollkommenheit zu Stande bringen. Lässt man nämlich in der Gleichung (2. b) $A = o$ seyn, so wird sie:

$$(\Theta + \Theta')\frac{v}{2T} - C = By^2, \qquad (2. c)$$

und enthält *gerade mit der Richtung der Hauptnormalebene parallele Helligkeitsbänder in sich.* Es ist aber schon in Ziffer XI. dieser Abhandlung nachgewiesen worden, dass sich aus jedem einaxigen Krystall Platten unter solcher Schiefe schneiden lassen, wobei $A = o$ wird, *demnach lassen sich aus jedem einaxigen Krystalle solche gleich dicke Platten heraus arbeiten, welche diese geradlinigen Helligkeitsbänder sehen lassen.* In Ziffer XII. dieser Abhandlung ist dargethan worden, dass sich aus keinem einaxigen Krystalle solche Platten entnehmen lassen, für welche $B = o$ würde; deswegen kann die Gleichung (2. b) nie die Form

$$(\Theta + \Theta')\frac{v}{2T} - C = Ax^2$$

annehmen, *und in Folge können unsere jetzigen beiden Platten nie geradlinige Helligkeitsbänder liefern, deren Richtung senkrecht auf der Richtung der diesen Platten gemeinschaftlichen Hauptnormalebene stünde.* — Die hier zur Entstehung von geradlinigen Helligkeitsbändern geforderte Bedingung $A = o$ ist keine andere als die schon oben in Ziffer XI. unter (1. a) vorgekommene, welche dort die Entstehung von Parabeln in einer einzigen Platte charakterisirte, und hieraus folgt, *dass gleich dicke aus demselben einaxigen Krystall geschnittene Platten, welche einzeln Parabeln sehen lassen, in der Weise dieser Ziffer übereinander gelegt, nothwendig geradlinige Interferenzbänder sehen lassen müssen.* Ja man überzeugt sich leicht, dass dieser Satz noch wahr bleibt, wenn in demselben

statt der Worte „aus demselben einaxigen Krystall" allgemeiner die „aus einaxigen Krystallen" gesetzt werden.

Die in der Gleichung (2. c) enthaltenen wahrhaft geraden Helligkeitsstreifen besitzen eine Eigenthümlichkeit, wodurch sie sich vom blosen Auge leicht von jenen blos annähernd geraden gleich beim ersten Blick unterscheiden lassen. Aus gedachter Gleichung (2. c) ergiebt sich nämlich:

$$y^2 = \frac{(\Theta + \Theta')v - 2CT}{2BT}, \tag{3. a}$$

und es stellt hierin y^2 das Quadrat des Abstandes derjenigen geradlinigen Helligkeitscurven von der Mitte des Gesichtsfeldes vor, die einem beliebigen, jedoch unveränderlich gedachten Werthe von $\Theta + \Theta'$ entsprechen. Lässt man in dieser letzten Gleichung $\Theta + \Theta'$ um 1 grösser werden, so liefert sie für y^2 das Quadrat des Abstandes derjenigen geradlinigen Helligkeitscurve von der Mitte des Gesichtsfeldes, welche die nächste gleichwerthige von der vorigen ist; man hat also, wenn dieser zweite Abstand durch y' bezeichnet wird:

$$y'^2 = \frac{(\Theta + \Theta' + 1)v - 2CT}{2BT} \tag{3. b}$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen findet man:

$$y'^2 - y^2 = \frac{v}{2BT}. \tag{3. c}$$

Aus dieser letzten Gleichung lässt sich schliessen, *dass die Differenz der Quadrate von den Abständen zweier nächster gleichwerthiger, in der Gleichung (2. c) enthaltener, geradliniger Helligkeitscurven oder zweier unmittelbar auf einander folgender Bänder eine unveränderliche Grösse ist, in so lange nämlich als dieselben Platten und dasselbe einfache Licht zu den Versuchen benützt werden.* Eine Folge der hier entwickelten Eigenthümlichkeit der in (2. c) enthaltenen geradlinigen Helligkeitsbänder ist aber die, dass die Abstände zweier unmittelbar

neben einander liegender von diesen Bändern um so kleiner werden müssen, je weiter diese von der Mitte des Gesichtsfeldes abliegen. Es werden sich daher die der Mitte des Gesichtsfeldes zunächst liegenden Bänder dem Auge unter verhältnissmässig vielmal grösseren gegenseitigen Abständen darstellen in Vergleich zu denen, welche mehr an den Grenzen des Gesichtsfeldes liegen, was bei jenen pseudogeradlinigen Bändern nicht der Fall ist, die vielmehr sämmtlich einerlei Abstand von einander zu haben scheinen. Hierin hat man ein dermassen entscheidendes Unterscheidungszeichen der echten von den unechten geradlinigen Streifen, dass sich ein auch nur flüchtig über das Bild gleitender Blick keinen Augenblick lang hierüber täuschen lassen kann.

Zu den Eigenschaften der in dieser Ziffer besprochenen Platten füge ich noch eine hinzu, welche für die optische Krystallkunde von sehr hoher Bedeutung zu seyn scheint. Man kann nämlich zu der Gleichung (2. b) dieser Ziffer auf zwei von einander sehr verschiedenen Wegen gelangen. Die in gegenwärtiger Ziffer vorausgesetzte relative Lage der beiden auf einander gelegten Platten lässt sich aus der in der vorigen Ziffer vorausgesetzten dadurch herleiten, dass man einer von ihnen eine Drehung von 180° um ihre Normale erleiden lässt, während die andere aus ihrer Lage in keiner Weise verrückt wird. Hierdurch eben ändert sich das ω' der zweiten Platte in $\omega \pm 180°$ um, und das ω der ersten Platte ändert seinen Werth nicht im Geringsten, so dass die obigen Gleichungen (2. a) und (2. b) eintreten. Denkt man sich hingegen eine von den beiden in der Lage der vorigen Ziffer befindlichen Platten, anstatt um ihre Normale, um den Durchschnitt ihrer Hauptnormalebene mit einer ihrer Oberflächen so lange gedreht, bis diese Oberfläche einen Winkel von 180° zurückgelegt hat, so bleibt nach dieser Drehung noch immer $\omega' = \omega$; aber der Werth des jetzigen a wird der Nebenwinkel von dem des vorigen, und in Folge wird der zuvor hohle Winkel 2a nun der diesen zu 360° ergänzende erhabene,

so dass sin. 2a in beiden Fällen zwar denselben absoluten Werth beibehält, dabei aber sein Vorzeichen umkehrt. Aus diesem Grunde nimmt der, Ziffer XXVIII. in den Gleichungen (1. b) dargestellte Coefficient D in den beiden Platten einerlei aber mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Werth an, wenn beide Platten aus demselben Krystall unter gleicher Schiefe zur optischen Axe genommen worden sind, und es wird, wenn

$$\Theta v = T\,(C + D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega)$$

die der ersten Platte entsprechende Gleichung ist, die der zweiten Platte angehörige:

$$\Theta' v = T'\,(C - D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega).$$

Aus der Summe dieser beiden Gleichungen geht aber wieder, wenn man $T' = T$ seyn lässt, die Gleichung (2. a) der gegenwärtigen Ziffer hervor, welche zu dem Schlusse zu berechtigen scheint, dass die auf die zuletzt beschriebene Art mit einander verbundenen beiden Platten wieder genau die gleichen Interferenzbilder liefern müssen, wie die nach der Eingangs dieser Ziffer beschriebenen Art verknüpften. Als ich diese Folgerung aus unsern Gleichungen an zwei gleich dicken Kalkspathplatten, deren Oberflächen einerlei Neigung zur optischen Axe hatten, im Versuch erprobte, fand ich dieselbe vollkommen bestätigt, die zuvor geradlinigen Streifen verwandelten sich durch Umkehrung der einen Platte, wie durch eine Umdrehung derselben um ihre Normale von 180° in ein System von concentrischen Ellipsen; als ich aber zum Versuche, statt deren, zwei gleich dicke aus einem Bergkrystall unter gleicher Schiefe herausgeschnittene Platten nahm, brachte die Umkehrung der einen von ihnen keine Aenderung in der Erscheinung hervor, während eine Umdrehung der einen von 180° um ihre Normale die zuvor scheinbar geradlinigen Streifen in ein durchbrochenes System von concentrischen Ellipsen verwandelte. Der hier wahrgenommene Unterschied zwischen Platten von Bergkrystall und andern einaxigen

Krystallen ist, wenn er sich ganz allgemein bestätigen sollte, ein höchst merkwürdiger, denn er verspricht für die exceptionelle Natur des erstgenannten Minerals ein entscheidendes Merkmal herzugeben.

XL. Wir wollen noch als drittes Beispiel zur Anwendung der in Ziffer XXXVII. aufgestellten Gleichungen den besondern Fall betrachten, wo die beiden aus einerlei einaxigem Krystall unter gleicher Schiefe zur optischen Axe geschnittenen Platten so über einander gelegt werden, dass deren Hauptnormalebenen einen Winkel von 90° mit einander machen. In diesem Falle ist $\omega_0 = \pm 90°$, desshalb ist $\sin. 2\omega_0 = o$, $\cos. \omega_0 = o$ und $\sin. \omega_0 = \pm 1$, und es lassen die Gleichungen (2. a) der Ziffer XXXVII.

$$T_1 = o,\ T_2 = o,\ T_4 = o \text{ und } T_3 = \pm \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \sin. 2\omega_2$$

werden, so dass (2. b) der Ziffer XXXVII. jetzt die nachstehende Gestalt annimmt:

$$\left.\begin{array}{c} A^2 = \mathfrak{A}^2 . \cos^2 . \varDelta \\ \mp \mathfrak{A}^2 . \sin. 2\omega_1 . \sin. 2\omega_2 . \cos. \chi''_1 . \cos. \chi'_2 . \sin^2 . \pi (\Theta' - \Theta), \end{array}\right\} \quad (1.)$$

und so zeigt, dass auch in diesem dritten besondern Falle wieder nur ein einziges Bild sich sehen lässt.

Um die Formen der in diesem Bilde wahrnehmbaren Helligkeitsbänder zu entdecken, nehmen wir die Gleichungen (2. a) und (2. b) der Ziffer XXXVIII. zur Hilfe, und bemerken, dass hier, wo die Hauptnormalebenen der beiden Platten unter einem rechten Winkel gegen einander gestellt sind, $\omega' = \omega \pm 90°$ wird, und dem gemäss $\sin. \omega' = \pm \cos. \omega$ und $\cos. \omega' = \mp \sin. \omega$ ist, wobei die obern oder untern Vorzeichen hier und in der Gleichung (1.) stets gleichzeitig genommen werden müssen. Hierdurch gehen die zuletzt genannten Gleichungen über in:

$$(2.\ a)\quad \Theta = \frac{T}{v}(C + D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega),$$

und

$$(2.\ b)\quad \Theta' = \frac{T'}{v}(C \mp D \sin. i \sin. \omega + B \sin^2. i \cos^2. \omega + A \sin^2. i \sin^2. \omega),$$

welche, wie die, woraus sie hervorgegangen sind, voraussetzen, dass beide Platten aus einerlei einaxigem Krystall unter gleicher Neigung zu dessen optischer Axe herausgearbeitet worden seien. Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, nnd stellt man dabei, um zu den einfachsten Resultaten zu gelangen, die Bedingung, dass $T' = T$ sei, d. h. dass beide Platten einerlei Dicke T erhalten haben, so findet man:

$$(2.\ c)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta' - \Theta = \frac{T}{v}[\mp D \sin. i (\sin. \omega \pm \cos. \omega) \\ + (A - B) \sin^2. i (\sin^2. \omega - \cos^2. \omega)], \end{aligned} \right.$$

in welcher Gleichung nur die beiden obern oder nur die beiden untern von den doppelten Vorzeichen gleichzeitig genommen werden dürfen. Nimmt man die beiden obern, so erhält man:

$$(3.\ a)\quad \Theta' - \Theta = \frac{T}{v} \sin. i (\sin. \omega + \cos. \omega) [-D + (A - B) \sin. i (\sin. \omega - \cos. \omega)];$$

nimmt man hingegen die beiden untern, so kommt:

$$(3.\ b)\quad \Theta' - \Theta = \frac{T}{v} \sin. i (\sin. \omega - \cos. \omega) [D + (A - B) \sin. i (\sin. \omega + \cos. \omega)],$$

und es entspricht die (3. a) der (1.) mit dem obern Vorzeichen genommen, also der:

$$(4.\ a)\quad A^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2. \mathcal{A} - \mathfrak{A}^2 \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2 \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi (\Theta' - \Theta),$$

während die (3. b) der (1.) mit dem untern Vorzeichen genommen entspricht, nämlich der folgenden:

$$(4.\ b)\quad A^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2. \mathcal{A} + \mathfrak{A}^2 \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2 \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi (\Theta' - \Theta).$$

Erwägt man nun, dass $\sin. 45^0 = \cos. 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, so überzeugt man sich ganz leicht, dass sowohl

$$\sin.\omega + \cos.\omega = \sqrt{2}\,(\sin.\omega\cos.45^0 + \cos.\omega\sin.45^0) = \sqrt{2}\sin.(\omega + 45^0)$$

als auch

$$\sin.\omega + \cos.\omega = \sqrt{2}\,(\sin.\omega\sin.45^0 + \cos.\omega\cos.45^0) = \sqrt{2}\cos.(\omega - 45^0),$$

und dass auch sowohl

$$\sin.\omega - \cos.\omega = \sqrt{2}\,(\sin.\omega\cos.45^0 - \cos.\omega\sin.45^0) = \sqrt{2}\sin.(\omega - 45^0)$$

als

$$\sin.\omega - \cos.\omega = \sqrt{2}\,(\sin.\omega\sin.45^0 - \cos.\omega\cos.45^0) = -\sqrt{2}\cos.(\omega + 45^0).$$

sei. Berücksichtigt man noch überdiess, dass die Gleichung (4. a) statt findet, wenn $\omega' = \omega + 90^0$ ist, und dass dann $\omega + 45^0$ das auf die Mittelrichtung zwischen den beiden Hauptnormalebenen bezogene Azimuth der im Gesichtsfelde hervorgehobenen Stelle ist, so wird die Gleichung (3. a), wenn wir dieses Azimuth durch Ω bezeichnen:

$$\Theta' - \Theta = -\sqrt{2}\frac{T}{v}D\sin.\Omega\sin.i - 2\,(A - B)\frac{T}{v}\sin^2.i\sin.\Omega\cos.\Omega. \qquad (5.\ a)$$

Eben so findet die Gleichung (4. b) statt, wenn $\omega' = \omega - 90^0$ ist, und dann ist $\omega - 45^0$ wieder das auf die Mittelrichtung zwischen den beiden Hauptnormalebenen bezogene Azimuth der im Gesichtsfelde hervorgehobenen Stelle, wodurch, wenn auch dieses wieder durch Ω bezeichnet wird, die Gleichung (3. b) übergeht in:

$$\Theta' - \Theta = \sqrt{2}\,.\frac{T}{v}D\sin.i\sin.\Omega + 2\,(A - B)\frac{T}{v}\sin^2.i\sin.\Omega\cos.\Omega. \qquad (5.\ b)$$

Diese beiden letzten Gleichungen aber sind im Grunde doch nur eine und dieselbe, weil $\Theta' - \Theta$ in jeder eine Succession von sowohl positiven wie negativen Werthen vorzustellen hat. Setzt man in der zuletzt geschriebenen Gleichung

$$\sin.i\sin.\Omega = y \quad \text{und} \quad \sin.i\cos.\Omega = x,$$

so wird sie:

$$\Theta' - \Theta = D\sqrt{2} \, . \, \frac{T}{v} \, . \, y + 2\,(A - B) \, . \, \frac{T}{v}\, xy$$

oder

$$(\Theta' - \Theta)\,\frac{v}{T} = D\sqrt{2} \, . \, y + 2\,(A - B)\, xy, \qquad (6.)$$

wodurch das in den über einander liegenden Platten entstandene Bild auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen wird, dessen Spitze in der Mitte des Gesichtsfeldes, und dessen x-Axe mitten zwischen den scheinbaren Hauptnormalebenen der beiden Platten liegt. Aus der Gleichung (6.) lässt sich nun sogleich entnehmen, *dass in zwei gleich dicken, aus demselben einaxigen Krystall unter gleicher Neigung zur optischen Axe geschnittenen Platten, welche so über einander gelegt worden sind, dass deren Hauptnormalebenen einen rechten Winkel mit einander machen, nur gleichseitige Hyperbeln sich sehen lassen können, deren Asymptoten mit den Coordinatenaxen zusammenfallen und deren Mittelpunkte mit einer einzigen Ausnahme ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes liegen *).*

Setzt man in der Gleichung (6.) $x - \frac{D}{(A - B)\sqrt{2}}$ an die Stelle von x, so wird sie:

$$(\Theta' - \Theta)\,\frac{v}{T} = 2\,(A - B)\, xy,$$

---

*) Die durch die Gleichung (1. b) der Ziffer XXVIII. gegebenen Werthe von A, B und D geben nämlich ohne alle Mühe zu erkennen, dass $A - B$ nur dann null werden können, wenn $v'^2 = m^2$, d. h. $a = o$ wird, und in diesem Falle verschwindet nothwendig auch D, so dass die Gleichung (6.) alle Bedeutung verliert. Es kann aber noch ausserdem $D = o$ werden, wenn $a = 90°$ und in Folge $v''^2 = m^2$ ist; dann aber wird $2\,(A - B) = \frac{v''^2 - v'^2}{vv''}$, und die Gleichung (6.) nimmt jetzt die Form $(\Theta' - \Theta)\frac{v}{T} = \frac{v''^2 - v'^2}{vv''}\, xy$ an, welche den einen oben angezeigten Ausnahmsfall hergiebt.

und zeigt in dieser Form, dass die hierdurch verlegte Spitze des Coordinatensystems in das Centrum der Hyperbeln gekommen ist; bezeichnet also E den Abstand dieses Centrums von der Mitte des Gesichtsfeldes, so hat man

$$E = \frac{D}{(A - B)\sqrt{2}},$$

oder, wenn man für A, B und D deren Werthe aus den Gleichungen (1. b) der Ziffer XXVIII. einsetzt:

$$E = \frac{vm\,(v''^2 - v'^2)\sin.2a}{v''^2\,(m^2 - v'^2)\sqrt{2}}. \qquad (7.\ a)$$

Setzt man ferner in der Gleichung (6.) $x = o$, so findet man aus ihr:

$$y = \frac{v}{T} \cdot \frac{\Theta' - \Theta}{D\sqrt{2}},$$

und dieser Werth von y giebt den Abstand der Helligkeitscurven in der Richtung der y-Axe von der Mitte des Gesichtsfeldes an. Dieser Abstand, welchen wir durch $\mathfrak{D}$ bezeichnen wollen, wird, wenn D durch seinen aus den Gleichungen (1. b) der Ziffer XXVIII. entnommenen Werth ersetzt wird:

$$\mathfrak{D} = \frac{vm^2\,(\Theta' - \Theta)\sqrt{2}}{T\,(v''^2 - v'^2)\sin.2a},$$

und gehört, wenn $\Theta' - \Theta$ ein gegebener Werth ist, einer bestimmten von den unzählig vielen Helligkeitscurven an; lässt man aber diesen Werth von $\Theta' - \Theta$ um 1 grösser werden, so bezieht sich derselbe auf die der vorigen nächste gleichwerthige Helligkeitscurve und man hat:

$$\mathfrak{D}' = \frac{vm^2\,(\Theta' - \Theta + 1)\sqrt{2}}{T\,(v''^2 - v'^2)\sin.2a},$$

wenn $\mathfrak{D}'$ den längs der y-Axe genommenen Abstand dieser neuen Helligkeitscurve von der Mitte des Gesichtsfeldes vorstellt. Aus dieser und der vorigen Gleichung aber ergiebt sich:

$$\mathfrak{D}' - \mathfrak{D} = \frac{vm^2 \cdot \sqrt{2}}{T\,(v''^2 - v'^2)\sin.2a}, \qquad (7,\ b)$$

und es bedeutet $\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}$ den Abstand zweier nächster gleichwerthiger Helligkeitscurven von einander, oder die Breite eines Helligkeitsbandes längs der y-Axe gemessen. Hieraus ersieht man, dass alle Helligkeitsbänder in der Richtung der y-Axe einerlei Breite haben, so lange man es mit 2 Platten aus demselben einaxigen Krystall, deren Oberflächen die gleiche Neigung zur optischen Axe haben, zu thun hat; zugleich aber geht auch aus der Gleichung (7. b) hervor, dass diese Breite sich ändert, wenn zwei andere Platten von der gleichen Dicke wie die vorigen aus demselben Krystall unter einerlei Neigung zur optischen Axe genommen werden, diese Neigung bei den jetzigen Platten jedoch eine andere als bei den vorigen ist. Sucht man nach den Regeln der Differentialrechnung den auch in m^2 enthaltenen Werth von a auf, für welchen die Breite der Bänder, nämlich $\mathfrak{D}'-\mathfrak{D}$ einen kleinsten Werth annimmt, so findet man diesen Umstand da eintretend, wo $tg.\,a = \frac{v''}{v'}$ wird, sonach, weil in allen bekannten einaxigen Krystallen v' und v'' nur sehr wenig von einander verschiedene Werthe haben, nahezu in solchen Platten, deren Oberflächen man eine Neigung von 45° zur optischen Axe gegeben hat.

Man kann der Gleichung (7. a), weil $m^2 = v''^2 \sin^2.a + v'^2 \cos^2.a$ und in Folge $m^2 - v'^2 = (v''^2 - v'^2)\sin^2.a$ ist, auch die einfachere Gestalt geben:

$$E = \frac{vm}{v''^2} \frac{\sin.2a}{\sin^2.a.\sqrt{2}}$$

oder, weil m^2 stets zwischen v''^2 und v'^2 liegt, und also der absolute Werth von m nie viel von dem v'' abweichen kann, mit grosser Annäherung an die volle Wahrheit auch schreiben:

$$E = \frac{v\sqrt{2}}{v''} \cot.a,$$

aus welcher Gleichung sich ersehen lässt, dass die im Gesichtsfelde wahrnehmbaren Schenkel der Hyperbeln am weitesten von deren Mittel-

punkte abliegen, und darum am meisten die geradlinige Form annehmen werden in solchen Platten, welche das kleinste a besitzen, d. h. deren optische Axen am wenigsten von der senkrechten Lage zu ihren Oberflächen abweichen, und aus der Gleichung (7. b) lässt sich leicht entnehmen, dass die Breite der Helligkeitsbänder von da ab, wo sie die kleinste ist, stets zunimmt, je mehr sich diese der geradlinigen Gestalt nähern.

XLI. Wir werden zu dem Beispiele der vorigen Ziffer noch Einiges die Beleuchtungsweise des bei ihm sich zeigenden Bildes betreffend, beifügen, weil wir dabei Gelegenheit erhalten, einige Eigenthümlichkeiten dieser Beleuchtung des Nähern zu besprechen. Die Stärke der Beleuchtung der in diesem Bilde wahrnehmbaren Stellen wird durch die Gleichung (1.) der vorigen Ziffer gegeben, und ist für $\omega_0 = +90^\circ$: *)

$$A^2 = \mathfrak{A}^2 [\cos^2.\mathit{A} - \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2 \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi(\Theta' - \Theta)]. \quad (1. a)$$

Setzt man in dieser Gleichung für ω_2 seinen aus der in Ziffer XXXVII. stehenden Gleichung (2. c) entnommenen Werth

$\mathit{A} - \omega'_0 - \omega_1$, nämlich $\omega_2 = \mathit{A} - 90^\circ - \omega_1$, weil hier $\omega_0 = 90^\circ$ ist, so ergiebt sich

$$\sin. 2\omega_2 = \sin. [2(\mathit{A} - \omega_1) - 180^\circ] = -\sin. 2(\mathit{A} - \omega_1),$$

und es geht hierdurch die Gleichung (1. a) über in:

$$\left.\begin{array}{c} A^2 = \mathfrak{A}^2 . \cos^2 . \mathit{A} \\ + \mathfrak{A}^2 \sin. 2\omega_1 \sin. 2(\mathit{A} - \omega_1) \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi(\Theta' - \Theta), \end{array}\right\} \quad (1. b)$$

*) Gienge man von dem Falle $\omega_0 = -90^\circ$ aus, so würden sich alle vor dem mit $\sin^2. \pi(\Theta' - \Theta)$ oder $\sin^2. \pi\eta$ stehenden Vorzeichen in den folgenden Gleichungen umkehren; dadurch würden aber diese Gleichungen selber sich nicht ändern, nur die Beziehung der denen (2. b) und (2. c) analogen Gleichungen zu den ungeraden und geraden Sectoren, von denen etwas später die Rede ist, würde sich umkehren.

welche Gleichung nun ganz analog ist der in der ersten Hälfte für eine einzige Platte erhaltenen, und, wenn man $\Theta' - \Theta$ in der Form $a + \eta$ schreibt, worin a irgend eine ganze Zahl, η hingegen irgend einen echten Bruch vorstellt, die nachstehende Form annimmt:

$$(1. c)\ A^2 = \mathfrak{A}^2 [\cos^2. A + \sin. 2\omega_1 \sin. 2(A - \omega_1) \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi\eta].$$

Macht man $A = \frac{1}{4}\pi$, d. h. stellt man die beiden Polarisationsebenen des Apparats unter einem halben rechten Winkel gegen einander, so wird $2(A - \omega_1) = \frac{1}{2}\pi - 2\omega_1$, und in Folge

$\sin. 2(A - \omega_1) = \cos. 2\omega_1$, weshalb die Gleichung (1. c) wird:

$$(2. a)\qquad A^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 (1 + \sin. 4\omega_1 \cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 \sin^2. \pi\eta).$$

Diese Gleichung liefert in allen jenen Ziffer XXXVII. besprochenen Fällen, wo sehr nahe $\cos. \chi''_1 \cos. \chi'_2 = 1$ ist, für A^2 einen grössten Werth, der sehr nahe

$$(2. b)\qquad A^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 (1 + \sin^2. \pi\eta)$$

ist in allen den Stellungen der vereinigten Platten zwischen den beiden Polarisationsebenen, wobei $\sin. 4\omega_1 = +1$ ist, also jedesmal da, wo ω_1 einen der Werthe: $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{5}{8}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$ annimmt; hingegen nimmt A^2 einen kleinsten Werth an, der sehr nahe

$$(2. c)\qquad A^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 (1 - \sin^2. \pi\eta)$$

ist bei allen den Stellungen der hier behandelten fest unter sich verbundenen beiden Platten zwischen den zwei Polarisationsebenen, wobei $\sin. 4\omega_1 = -1$ ist, also jedesmal da, wo ω_1 einen der Werthe: $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$, $\frac{15}{8}\pi$ erhält. Theilt man diesemnach von der vordern Polarisationsebene ausgehend das ganze Gesichtsfeld in acht gleiche Sectoren und zählt man diese Sectoren von der genannten Polarisationsebene ab in der positiven Richtung der Winkelebenen, so wird die in den vereinigten Krystallplatten sich zeigende Figur am meisten Licht besitzen, wenn

die Hauptnormalebene der ersten Platte mitten in einen der ungeraden Sectoren hinein fällt; hingegen wird dieses Bild am wenigsten Licht in sich enthalten, wenn gedachte Hauptnormalebene mitten in einen der geraden Sectoren hinein fällt. Und offenbar kann man die Stellung der unter sich verbundenen Platten eben so gut auch auf die Mittelrichtung zwischen den Hauptnormalebenen der beiden Platten beziehen, nur erhält dann das Bild am wenigsten Licht, wenn diese Mittelrichtung mitten in einem der ungeraden Sectoren liegt, und am meisten, wenn sie mitten in einem der geraden Sectoren liegt, wie schon daraus erhellet, dass die Mittelrichtung genau um einen dieser Sectoren von jeder der beiden Polarisationsebenen abliegt.

An diesen Unterschied im Lichtreichthum der Interferenzbilder je nach der Stellung der rechtwinklig gekreuzten Platten zwischen den unter 45° gegen einander geneigten Polarisationsebenen knüpft sich eine andere Eigenthümlichkeit der beiderlei Helligkeitsbilder an, die sich aus folgenden Betrachtungen entnehmen lässt. Man kann nämlich den Gleichungen (2. b) und (2. c) die andere Form geben:

$$A^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta \quad \text{und} \quad A^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta \qquad (2.\ d)$$

und sich leicht überzeugen, dass der Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta$ in der vordern von diesen beiden Helligkeiten die hintere zu $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ ergänzen würde, wenn er für sich allein vorhanden wäre; dieser Theil aber nimmt, während η alle Werthe zwischen o und ± 1 durchläuft, alle Helligkeiten von o bis $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ und von da wieder zurück bis zu o hin an, und die hintere der Helligkeiten (2. d) nimmt, während η die gleichen Werthe durchläuft, successive dieselben Stärken an wie der Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta$ nur in umgelegter Ordnung, indem sie von $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ ausgeht, bis zu o hinsinkt und von da wieder bis zu $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ hin ansteigt. Hieraus nun folgt, dass von der vordern Helligkeit (2. d) blos der Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta$ die zur Entstehung von Lichtfiguren erforderliche Ungleichheit der Beleuchtung hergiebt, während ihr anderer Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ keinen andern Einfluss

übt, als dass er die im vorigen Theile enthaltenen ungleichen Helligkeiten jede um gleich viel vermehrt, während die hintern Helligkeiten (2. d), die von o bis zu $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ hin, alle Werthe in sich enthalten, keinen solchen gemeinschaftlichen Bestandtheil aufzuweisen vermögen. Aus diesem Grunde tritt die aus den hintern Helligkeiten (2. d) hervorgehende Figur, trotz ihrer grössern Lichtarmuth, doch mit grösserer Lebhaftigkeit hervor, als die aus den vordern Helligkeiten (2. d) hervorgehende Figur, denn der Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ in letzterer trägt nicht nur nichts zur stärkeren Hervorhebung der aus ihrem andern Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta$ entspringenden Figur bei, sondern im Gegentheile er vermindert deren Deutlichkeit, indem er sie allerwärts mit einem gleichförmigen Lichte gleichsam übertüncht und dadurch den Gegensatz zwischen Hell und Dunkel in ihr um so mehr in den Hintergrund zurückdrängt, je mehr er selber im Vergleich zu der im Bilde herrschenden Ungleichheit der Beleuchtung beträgt. Wir werden bei der nun folgenden näheren Besprechung dieses Punktes den bildschwächenden Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2$ der vordern Helligkeiten (2. d) durch M, den bildgebenden Theil $\frac{1}{2}\mathfrak{A}^2 \sin^2.\pi\eta$ derselben Helligkeiten durch N, so wie die durchweg bildgebenden hintern Helligkeiten (2. d) durch P bezeichnen.

Nehmen wir nun zuvörderst an, dass homogenes Licht, d. h. solches, dessen Wellen sämmtlich einerlei Länge besitzen, zum Versuche diene; dann enthalten die drei Theile M, N, P sämmtlich ein und dasselbe Licht in sich, die Theile N und P an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes in veränderlicher Stärke, der Theil M hingegen an allen Stellen in gleicher Stärke, die aus N hervorgehende Figur mit ihrem eigenen Lichte von der grössten in ihr vorhandenen Stärke gleichförmig überziehend. Während also die Bänder der in P enthaltenen Figur vom tiefsten Dunkel bis zu Licht von gewisser Stärke zunehmen, und von da wieder bis in's tiefste Dunkel zurückgehen, gehen die Bänder der aus den Theilen M und N entspringenden Figur von der doppelten

Lichtstärke bis zur einfachen über und von da wieder in die doppelte zurück, welche Unterschiede, obgleich an sich gleich gross, doch dem Auge nicht mit derselben Gewalt entgegentreten, indem der Eindruck auf's Auge mehr von dem geometrischen Verhältniss der Extreme als von ihrem arithmetischen abzuhängen scheint. So in der That stellen sich die Helligkeitsbänder in den beiderlei Stellungen unserer rechtwinklig gekreuzten Platten zwischen den unter 45° gegen einander geneigten Polarisationsebenen dem Auge im homogenen Lichte entgegen.

Nehmen wir aber zweitens an, das ankommende Licht sei aus zwei verschiedenen homogenen Lichtern zusammengesetzt, so wird von jedem derselben alles das gelten, was so eben von einem solchen Lichte ausgesagt worden ist. Beide liefern ihre aus den Theilen N und P hervorgehende Figuren in ihrer eigenen Farbe, von denen sich die erstere noch mit Licht von derselben Farbe überzieht. Die einem gegebenen Werthe von η entsprechende Lichtstärke in jedem dieser beiden Bilder ist der Menge des auf die Platte fallenden Lichtes von jeder Art, nämlich $\mathfrak{A}^2$, proportional, wie die Gleichungen (2. d) sogleich zu erkennen geben; sie stehen daher in beiden Figuren in einem constanten Verhältnisse zu einander, in demselben nämlich, in welchem die beiden homogenen Lichter unter sich vermengt auf die Platten fallen. Die Dimensionen der aus den beiden Lichtern in den Platten erzeugten Figuren aber ändern sich mit der Art des auffallenden homogenen Lichtes ab, wie sich ohne Mühe aus der Gleichung (6.) in Ziffer LX. entnehmen lässt, wenn man sich erinnert, dass T die Dicke der Platten in den Wellenlängen v gemessen vorstellt, und dass dem gemäss $\frac{v}{T}$ seinen Werth mit v zugleich abändert. Eine Folge dieser Ungleichheit in den Dimensionen der zu verschiedenem homogenen Lichte gehörigen Figuren ist aber die, dass die verschiedenen Farben der übereinander liegenden beiden Bilder sich in mannigfaltigen Verhältnissen unter einander vermischen und alle Mitteltinten zwischen den beiden Farben erzeugen,

wodurch eine Mannigfaltigkeit in die jetzige Erscheinung eingeführt wird, die indessen in der aus M und N hervorgehenden Figur geringer ist, als in der aus P erzeugten, weil jene allerwärts mit dem Theile M des auf die Platten fallenden Lichtes gleichmässig überzogen ist.

Fassen wir endlich den Fall in's Auge, wo weisses, aus den verschiedensten homogenen Lichtern in bestimmten Verhältnissen zusammengesetztes Licht zu den Versuchen dient, so gilt von den in unsern über einander liegenden Platten erzeugten Bildern erstlich wieder alles das, was in Ziffer XXIV. von dem Bilde einer einzigen Platte ausgesagt worden ist und zwar aus dem gleichen Grunde. Es zeigen sich in unsern über einander liegenden und rechtwinklig gekreuzten Platten bei Anwendung vom gewöhnlichen Tageslichte nothwendig prismatisch gefärbte Bänder, jedoch in beschränkter Anzahl, weil $\Theta' - \Theta$ in der Gleichung (6.) der Ziffer XL. Werthe von jeglicher Kleinheit annehmen kann, und hieraus die Entstehung von Streifen im Weisslicht ganz eben so hergeleitet werden kann, wie es in Ziffer XXIV. in Bezug auf eine einzige Platte, deren optische Axe senkrecht auf ihren Oberflächen steht, geschehen ist. Haben bei diesen Versuchen die beiden Polarisationsebenen eine Neigung von 45° gegen einander, so treten in den beiderlei Lagen der Platten zwischen ihnen, die weiter oben hervorgehoben worden sind, und in denen die Intensitätsgleichungen (1. a) und (1. b) sich bilden, Unterschiede ein, die sich aus dem bisher Gesagten leicht erkennen lassen, welche Unterschiede sich überall in zwei solchen Lagen zeigen, wo die Intensitätsgleichung zweierlei den eben angezeigten (2. d) analoge Formen liefert. Jedes im Weisslicht enthaltene homogene Licht überzieht im Bilde der grössten Helligkeit das ganze Gesichtsfeld gleichförmig mit einem seiner auffallenden Menge proportionalen Lichtantheile, daher überdecken sämmtliche im Weisslicht enthaltenen homogenen Lichter das Gesichtsfeld mit Antheilen, die unter sich in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie im Weisslicht selber, und aus diesem

Grunde ihrerseits wieder zu Weisslicht zusammen treten; in dem Bilde der geringsten Helligkeit hingegen finden dergleichen Ueberzüge nicht statt. Jene Ueberzüge aber machen das hellere Bild in dem Grade unbestimmter und matter als das dunklere, dass man sich bei jeder Wiederholung des Versuches unwillkührlich und trotz der gewonnenen Einsicht in die Sache immer wieder auf's Neue in Erstaunen gesetzt fühlt. Der hier besprochene ungeheure Abstand in der Schärfe der Bilder bei den zweierlei Lagen der Hauptnormalebenen lässt sich schon in einer einzigen Platte beobachten, deren optische Axe senkrecht auf ihren Oberflächen steht, wenn die Polarisationsebenen des Apparats einen Winkel von 45° mit einander machen, und zwar noch besser als in zwei Platten, weil hier die mit einander zu vergleichenden Bilder neben einander gleichzeitig zum Auge gelangen, wodurch ihre Vergleichung gar sehr erleichtert wird. Ich mache diesen Betrachtungen ein Ende nicht aus Mangel an Stoff, sondern wegen der dieser Arbeit gesteckten Grenzen. Auch sage ich gar nichts in gedachter Beziehung von zwei Platten, die sich unter den in Ziffer XX. angeführten besondern Umständen befinden, weil hierbei gar zu geringe Schwierigkeiten zu überwinden sind.

XLII. In allen vorstehenden Beispielen wurde unaufhörlich angenommen, dass die beiden Platten aus einerlei Krystall unter gleicher Schiefe ihrer Oberflächen zur optischen Axe heraus geholt worden seien, wodurch wir eben zum Gebrauche der beschränkteren Gleichungen (2. a) und (2. b) in Ziffer XXXVIII. und den folgenden berechtigt worden sind. Hat man es mit zwei Platten zu thun, die aus verschiedenen einaxigen Krystallen hergenommen worden sind, oder deren Oberflächen in beiden ungleiche Neigungen zur optischen Axe erhalten haben, so muss man sich der Gleichungen (2. a) in Ziffer XXVIII. bedienen, welche dann in gleicher Weise, wenn schon mittelst etwas zusammengesetzterer Rechnungsformeln zu dem gewünschten Ziele führen, so dass es der gegenwärtigen Abhandlung gelungen ist, *alle Erscheinungen*

in einer oder in zwei völlig beliebig über einander liegenden einaxigen Krystallplatten, (diese Platten mögen gleich dick seyn oder nicht, und aus einerlei oder verschiedenen Krystallen unter gleicher oder wechselnder Schiefe ihrer optischen Axe zu ihren Oberflächen genommen worden seyn, wenn nur die Oberflächen einer jeden unter sich parallel sind) einer genauen und vollständigen Erklärung unterwerfen und einer völlig bestimmten Antwort entgegen sehen zu können. Allerdings dürfen die Gleichungen der Ziffer XXXVII. nicht mehr benützt werden, so wie bei dem Versuche Einfallswinkel sich geltend machen, die nicht beträchtlich kleiner sind, als die, welche die optischen Axen der Platten mit den Normalen zu ihren Oberflächen machen; in diesem Falle indessen hat man zu jenen allgemeineren Gleichungen seine Zuflucht zu nehmen, aus denen die der Ziffer XXXVII. hervorgegangen sind, und die selber wieder in dem gegenwärtigen Falle einer beträchtlichen Vereinfachung fähig sind. Um ein Beispiel von der grossen Gelenkigkeit unserer allgemeinen Gleichungen in der Beantwortung von sehr weit ausgreifenden Fragen zu geben, legen wir uns die folgende Aufgabe zur Lösung vor:

Alle möglichen Fälle anzugeben, wie aus jedem von zwei beliebig vorgelegten einaxigen Krystallen eine Platte herausgeschnitten werden kann, dass beide Platten in bestimmter Weise über einander gelegt ein System von concentrischen Mittelpunktscurven sehen lassen, dessen Centrum in der Mitte des Gesichtsfeldes liegt.

Zur Lösung dieser Aufgabe dienen unmittelbar die Gleichungen (2. c) der Ziffer XXVIII. oder noch besser die aus den dortigen beiden (1. a) und (1. c) durch Addition und Subtraction gezogenen:

$$(\Theta' \pm \Theta)v = C'T' \pm CT + \sin. i\,(D'T' \cos.\omega' \pm DT \cos.\omega) + \sin^2. i\,(B'T' \sin^2.\omega' \pm BT \sin^2.\omega + A'T' \cos^2.\omega' \pm AT \cos^2.\omega),$$

aus denen sich sogleich ersehen lässt, dass das verlangte System dem Auge entgegentreten muss jedesmal, wenn

$$D'T' \cos. \omega' \pm DT \cos. \omega = o \qquad (1. a)$$

ist, welche Bedingung sonach die allgemeinste, wenn schon noch etwas räthselhafte Beantwortung der uns vorgelegten Frage in sich trägt.

Um uns über den Sinn der durch die Gleichung (1. a) gegebenen Antwort in's Klare zu bringen, müssen wir bedenken, dass $\omega' = \omega - \omega_0$ ist, wenn ω_0 den Winkel vorstellt, unter welchem die Hauptnormalebenen der beiden Platten gegen einander gestellt werden, als positive oder negative Grösse, je nachdem ω' kleiner oder grösser als ω ist; es ist diesem nach

$$\cos. \omega' = \cos. \omega . \cos. \omega_0 + \sin. \omega . \sin. \omega_0$$

und hiernach verwandelt sich die Gleichung (1. a) in:

$$D'T' \sin. \omega_0 \sin. \omega + (D'T' \cos. \omega_0 \pm DT) \cos. \omega = o$$

und diese kann nur für jeglichen Werth von ω, d. h. an allen Stellen des Gesichtsfeldes Bestand haben, wenn sowohl

$$D'T' \sin. \omega_0 = o \text{ als } D'T' \cos. \omega_0 \pm DT = o$$

ist. In Folge der ersten von diesen beiden Bedingungen muss aber entweder $D' = o$ oder $\sin. \omega_0 = o$ seyn. Ist erstens $D' = o$, so muss in Folge der zweiten Bedingung auch $D = o$ seyn, d. h. es müssten beide Platten jede für sich schon ein System von der verlangten Art liefern, welchen Fall wir als für sich verständlich auf der Seite liegen lassen werden; ist aber zweitens $\sin. \omega_0 = o$, so zieht diess $\omega_0 = o$ oder $\omega_0 = 180^0$ nach sich, und aus $\omega_0 = o$ folgt $\cos. \omega_0 = +1$, so wie aus $\omega_0 = 180^0$ folgt $\cos. \omega_0 = -1$, wodurch die zweite Bedingung im ersten Falle

$$D'T' \pm DT = o, \text{ im andern Falle } -D'T' \pm DT = o$$

wird, welche beide jedoch nicht wesentlich von einander verschieden sind, indem diese doppelte Bedingung im Grunde nichts anders sagt, als dass unter übrigens gleichen Umständen eines der Glieder $D'T'$ und

DT oder eine der Grössen D′ und D sein Vorzeichen umkehren muss, wenn man von dem Falle, wo $\omega_0 = o$ ist, zu dem Falle, wo $\omega_0 = 180^\circ$ ist, übergehen will. Hiernach enthält die Bedingung (1. a), recht verstanden, die beiden andern in sich, erstlich:

$$(1.\ b) \qquad \omega_0 = o \text{ oder } \omega_0 = 180^\circ,$$

oder mit Worten: „die Hauptnormalebenen der beiden Platten in einander und entweder gleichläufig oder gegenläufig“, zweitens

$$(1.\ c) \qquad D'T' \pm DT = o$$

oder mit Worten: „die Dicken der beiden Platten den absoluten Werthen der Coefficienten D und D′ umgekehrt proportional“,

und in den Gleichungen (1. b) und (1. c) ist eine vollkommen klare Deutung der in (1. a) gegebenen Antwort enthalten.

Wir können indessen die erhaltene klare Antwort doch noch mehr in's Besondere ziehen, wenn wir erwägen, dass nach Aussage der in Ziffer XXVIII. enthaltenen Gleichungen

$$D = \tfrac{1}{2}\,\frac{v''^2 - v'^2}{m^2}\,\sin.2a,$$

oder weil man $m^2 = v''^2 \sin^2.a + v'^2 \cos^2.a$ und $\tfrac{1}{2}\sin.2a = \sin.a.\cos.a$ setzen kann,

$$D = \frac{v''^2 - v'^2}{v''^2\,\mathrm{tg}.a + v'^2\cot.a}$$

ist, wofür man auch, wenn man der Einfachheit halber

$$v''^2 - v'^2 = \Delta \text{ und } v''^2\,\mathrm{tg}.a + v''^2\cot.a = \Sigma$$

setzt, schreiben kann:

$$D = \frac{\Delta}{\Sigma}.\text{*)}$$

---

*) Diese Form von D zeigt an, dass das Vorzeichen dieses Coefficienten in das entgegengesetzte überspringt, wenn entweder $\Delta = v''^2 - v'^2$ sein

Eben so findet man:

$$D' = \frac{\varDelta'}{\Sigma'},$$

wenn $\varDelta'$ und Σ' dieselbe Bedeutung in Bezug auf die zweite Platte haben, wie $\varDelta$ und Σ in Bezug auf die erste Platte, und bei diesen Formen von D und D' verwandelt sich die Bedingung (1. c) in:

$$\frac{\varDelta'}{\Sigma'} T' \pm \frac{\varDelta}{\Sigma} T = o. \qquad (1.\ d)$$

Zum Bestehen dieser Bedingung ist erforderlich, dass deren beide Theile $\frac{\varDelta'}{\Sigma'} T'$ und $\pm \frac{\varDelta}{\Sigma} T$ Zahlen von derselben Grösse aber mit entgegengesetzten Vorzeichen seien, und da dieser letztern Anforderung stets durch eine geeignete Wahl des Vorzeichens von einem der beiden Coefficienten $\frac{\varDelta}{\Sigma}$ und $\frac{\varDelta'}{\Sigma'}$ entsprochen werden kann, so hat man auf weiter nichts zu sehen, als dass jene beiden Theile einerlei absolute Werthe besitzen, oder dass

$$\frac{\varDelta'^2}{\Sigma'^2} T'^2 = \frac{\varDelta^2}{\Sigma^2} T^2 \qquad (2.\ a)$$

sei. Man sieht hieraus, dass unsere Aufgabe sogar dann noch lösungsfähig ist, wenn gleich $\varDelta$ und Σ sowohl wie $\varDelta'$ und Σ' völlig gegebene Grössen sind, d. h. wenn für jede Platte der Krystall, aus dem sie geschnitten werden soll, und die Schiefe, unter dem diess zu geschehen hat, besonders vorgeschrieben wird, weil man dann doch noch durch das Verhältniss der Dicken beider Platten die Bedingung (2. a) erfüllen kann. Hat man zwei aus demselben Krystall und unter gleicher Schiefe zur

Vorzeichen ändert, d. h. wenn ein positiver Krystall durch einen negativen ersetzt wird und umgekehrt, oder wenn $\Sigma = v''^2 \operatorname{tg.} a + v'^2 \operatorname{cotg.} a$ sein Vorzeichen ändert, d. h. wenn a aus dem spitzen in den stumpfen Zustand übergeht und umgekehrt, was einer Umkehrung der bezüglichen Platte entspricht. Hierbei ist jedoch die zu Ende der Ziffer XXXIX. angezeigte Erfahrung nicht ausser Acht zu lassen, wornach der Quarz eine Ausnahme macht.

optischen Axe geschnittene Platten, so wird in diesen $\Delta' = \Delta$ und $\Sigma' = \Sigma$, und deswegen geht in diesem Falle die Bedingung (2. a) über in:

$$(2.\ b) \qquad T' = T.$$

Bei Platten also, welche aus einerlei einaxigem Krystall unter gleicher Schiefe zur optischen Axe geschnitten worden sind, wird zum Hervorbringen eines um die Mitte des Gesichtsfeldes herumliegenden Systems von Mittelpunktscurven nichts weiter verlangt, als dass sie gleich dick seien und dass deren Hauptnormalebenen mit einander parallel laufen. Diese letztere ausnehmend in's Besondere gezogene Auflösung unserer Aufgabe kommt mit jener überein, welche in Ziffer XXXIX. durch die dortige Gleichung (2. b) erhalten worden ist.

Die vielen in den Bedingungen (1. a) oder (1. c) der freien Wahl überlassenen Grössen gestatten es, die vorgelegte und ähnliche Aufgaben noch mit einer Menge von weitern Bestimmungen zu versehen. So z. B. kann bei unserer jetzigen Aufgabe die Art der sich zeigenden Mittelpunktscurven und das Verhältniss ihrer Parameter, ja unter Umständen sogar deren Grösse und noch manche andere Eigenschaft des entstehenden Bildes bedingt werden. Weil indessen solche Verwickelungen der Aufgabe nothwendig auch zusammengesetztere Rechnungsformeln nach sich ziehen, so halte ich es für gerathener, deren Behandlung dem Leser selbst anheim zu stellen. Aus dem gleichen Grunde betrachte ich auch nicht drei oder mehr über einander liegende Platten, wiewohl sich die hierfür gültigen Gleichungen in ganz gleicher Weise wie für zwei Platten erhalten lassen. Eine kurze Umschau in dieser Beziehung zeigte mir, dass bei mehr als zwei Platten statt der Gleichung (2.) in Ziffer XXXVI. eine andere eintritt, die innerhalb der eckigen Klammern dasselbe erste Glied und analoge folgende Glieder besitzt; die Zahl dieser folgenden Glieder und damit die Anzahl der in den über einander liegenden Platten sich möglicherweise zeigenden Bilder aber wächst in einer ausserordentlich rasch ansteigenden Proportion. Ich glaube bemerkt

zu haben, dass wenn über eine Platte, die bekanntlich nur ein Bild giebt, eine zweite gelegt wird, diese zu 3 Bildern mehr Veranlassung giebt; wird über diese zwei Platten noch eine dritte gelegt, so giebt diese zu 9 oder 3^2 Bildern mehr Veranlassung; eine vierte über diese drei gelegte Platte kann 27 oder 3^3 Bilder mehr erzeugen und so fort, so dass in n über einander gelegten Platten möglicherweise $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ Bilder entstehen zu können scheinen. Diese Zahl der Bilder kann sich jedoch dadurch sehr vermindern, dass ein Theil davon ganz und gar verschwindet aus Ursachen, wie sie in den oben gegebenen Beispielen vorhanden waren, oder weil manches von den Bildern zu weit über das Gesichtsfeld hinausrückt, um darin noch wahrgenommen werden zu können, selbst wenn zu den Versuchen sogenanntes homogenes Licht genommen wird, das doch nie vollkommen homogen ist. Diese überaus grosse Bilderzahl bei einer beträchtlichen Anzahl von Platten bewog mich, von dergleichen Untersuchungen schnell wieder abzustehen, um meine Leser nicht dadurch zu ermüden. Dagegen glaube ich dem Wunsche manchen Lesers zu entsprechen und in seinem Interesse zu handeln, wenn ich Versuche beifüge, wodurch ausser Zweifel gestellt wird, dass viele Erscheinungen in Krystallplatten durch die frühern minder streng gehaltenen Rechnungen ganz und gar nicht erklärt werden können.

Anhang zu der vorstehenden Abhandlung,

worin der experimentelle Nachweis geliefert wird, dass die aus unserer Abhandlung hervorgegangenen Besonderheiten an den Erscheinungen in Krystallplatten in der Erfahrung auch wirklich begründet sind.

Obgleich unsere Erklärung der in einaxigen Krystallen wahrnehmbaren Interferenz-Erscheinungen sich strenge an die von Fresnel aufgestellten und allgemein angenommenen Grundsätze der Lichtwellenlehre, und an die schon von Huyghens erkannte Wirkungsweise der doppeltbrechenden einaxigen Krystalle angeschlossen hat, so ist sie doch überall berichtigend und ergänzend vorwärts geschritten, und es haben sich dabei theils neue Gesichtspunkte, theils neue Thatsachen in grosser Menge herausgestellt, was eine Folge der grössern Vollständigkeit und Allgemeinheit unserer Darstellungsweise, so wie der geschlossenen Aufeinanderfolge aller einzelnen Betrachtungen zu seyn scheint. So wie aber jede Vervollkommnung der Theorie immer wieder neue Anforderungen an die Beobachtungen macht, so hat auch die vorliegende Behandlung neue Anhaltspunkte in der Erfahrung dringend nöthig, desshalb beschloss ich in dieser Beziehung vorläufig zu thun, was die Umstände mir gerade gestatten wollten.

Der in Ziffer XL. enthaltene Satz, wornach in zwei rechtwinklig gekreuzten Platten von gleicher Dicke, welche aus einerlei Krystall unter gleicher Neigung zur optischen Axe geschnitten worden sind, unter allen Umständen immer Hyperbeln auferstehen können, überraschte mich anfänglich in dieser Allgemeinheit sehr, weil schon die bekannte, in unter 45° geschnittenen Platten sich gebende Erscheinung ihm Hohn zu sprechen schien. Als ich aber diese sogenannten geradlinigen Streifen mit mehr Aufmerksamkeit betrachtete, konnte ich mich recht gut von deren Hyperbelform überzeugen. Ist man im Besitze einer optischen

Zange von einem einigermassen grossen Gesichtsfelde, und hält man diese, zwischen welcher die unter 45° geschnittenen und gekreuzten Platten eine solche Lage erhalten haben, dass sie im Tageslichte ihre Streifen möglichst lebhaft erscheinen lassen, so in der Hand, dass der mittlere in einer lothrechten Stellung vor den Augen liegt; neigt man die Zange sodann dergestalt von einer Seite zur andern, dass jener mittlere Streifen dabei stets seine lothrechte Lage möglichst genau beibehält, so kann man sich ohne grosse Mühe und mit voller Sicherheit überzeugen, dass die im Gesichtsfelde sichtbaren Streifen, während man sie mittelst des Neigens der Zange von ihrem einen äussersten Ende bis zum andern verfolgt, nach der einen Seite hin sich fortwährend weiter von einander entfernen, und gleichzeitig wird man gewahr, wie die neben dem mittelsten liegenden Streifen sich von diesem zu beiden Seiten in entgegengesetzter Richtung stets mehr und mehr abwenden *); dieses Auftreten der Erscheinung ist aber mit keiner andern als der Hyperbelkrümmung vereinbar. Selbst bei Platten, deren Oberflächen sich mehr der senkrechten Lage zur optischen Axe nähern, als diese thun, wenn es nur nicht in dem Maasse der Fall ist, dass schon jede einzelne Platte im gewöhnlichen Tageslichte ihre Interferenzfigur sehen lässt, ist die Hyperbelkrümmung auf die angezeigte Weise noch ganz gut zu erkennen.

Unter den möglichen Interferenzfiguren zogen insbesondere jene meine Aufmerksamkeit an sich, die nur bei einem völlig bestimmten Schnitt der Platten, ausserdem nicht, entstehen und daher zufällig wohl

*) Man erhält auf obige Weise denselben Eindruck, wie ihn die Figur 10 der Kupfertafel V. in dem in der Vorerinnerung angezogenen Supplementbande zu Poggendorfs Annalen giebt; nur ist die Eigenthümlichkeit der Figur hier weit minder ausgesprochen und darum ein Neigen der Zange von einer Seite zur andern zu deren sicherer Wahrnehmung erforderlich.

nie zur vollkommenen Wahrnehmung gelangen können. Dahin gehört bei einer einzigen Platte die Parabelkrümmung, und um diese darzustellen liess ich mir aus Bergkrystall Platten anfertigen, deren Oberflächen eine Neigung von 35° 10′ zur optischen Axe hatten, und andere aus Kalkspath, in denen dieser Winkel 36° 44′ betrug, welche Winkel mir die Rechnung als zur Entstehung von Parabeln erforderlich in diesen beiden Mineralien angezeigt hatte. Als ich diese Platten zwischen der optischen Zange im homogenen Lichte untersuchte, fand ich sowohl in denen aus Bergkrystall wie in denen aus Kalkspath *krummlinige* Bänder, welche, so weit ich sie auch nach den Grenzen des Gesichtsfeldes hin verfolgen mochte, überall den gleichen gegenseitigen Abstand von einander behaupteten *), was ohne scharfe Messung das sicherste Kennzeichen für das Dasein der Parabeln ist. Diese krummlinigen Bänder wurden zwar im Bergkrystall von scheinbar geradlinigen durchschnitten, welche aber nur die individuelle Natur des auch in vielen andern Beziehungen sich auszeichnenden Minerals angehen, und in ähnlicher Weise auch bei jenem System von Ellipsen, von welchem unsere Abhandlung ausgieng, sich sehen lassen. Solche Parabeln machen im ersten Augenblick oft denselben Eindruck auf's Auge, wie jene eben besprochenen geradlinigen Helligkeitscurven, die in unter 45° geschnittenen gleich dicken Platten im homogenen Licht entstehen, nur dass das Krummsein der Parabeln dem Auge leicht und entschieden entgegen tritt, während es sich bei den sogenannten geradlinigen Streifen nur mit Mühe und dann noch in anderer Art erkennen lässt.

In zwei gleich dicken, aus einerlei Krystall unter gleichen Winkeln zur optischen Axe geschnittenen Platten sind es die wahrhaft gerad-

*) Die Fig. 7 in Tafel V. des in der vorigen Note angezeigten Supplementbandes zu Poggendorffs Annalen giebt für die hier besprochene Erscheinung ein ziemlich getreues Abbild her.

linigen Bänder, welche bei einem gegebenen Krystall eine völlig bestimmte Neigung der Oberflächen zur optischen Axe verlangen. Die Darstellung dieser geradlinigen Bänder in grosser Vollkommenheit setzt eine recht genaue Bearbeitung der Platten voraus, und um diess recht klar vor Augen zu legen, werde ich eine doppelte Menschlichkeit, die mir begegnet ist, zum Besten geben. Gleich anfangs, als ich die Möglichkeit der Entstehung von dergleichen wahrhaft geradlinigen Bändern aus den Rechnungsformeln zu erkennen anfieng, benützte ich zur Bestimmung des Schnitts, den die hierzu erforderlichen Platten erhalten müssen, die in Knochenhauers Undulationstheorie des Lichts pag. 193 mitgetheilte Gleichung, der einzigen mir bekannten, welche die dazu nöthige Allgemeinheit in sich trug, nachdem ich in ihr

$$\frac{A^2\varphi^2 \cos^2.\omega}{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ an die Stelle von } \frac{A^2\varphi^2 \cos^2.\omega}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}}$$

gesetzt hatte, wie mir der Weg, auf dem sie erhalten worden war, zu verlangen schien. Die nach der so abgeänderten Gleichung berechneten Platten gaben indessen nicht die erwarteten geradlinigen Bänder, sondern deutlich ausgesprochene und noch ganz hübsche Ellipsen, wovon zweifelsohne der Grund darin zu suchen ist, dass dort zur Vereinfachung

$$\frac{A}{\sqrt{[1-(C-\frac{1}{2}C\varphi'^2+A\varphi' \cos.\omega)^2]}}=1$$

gesetzt worden ist, was allerdings (unter Umständen) zu einem Fehler von Belang Anlass geben kann, und mich im vorliegenden Falle zu einer Umarbeitung aller bis dahin bekannten Rechnungen dieser Art antrieb. Aber sogar als ich schon im Besitze der in Ziffer VII. mitgetheilten allgemeinen Gleichung (5.) war, spielte mir noch meine übertriebene Eilfertigkeit einen argen Streich. Ich hatte bei meiner Berechnung der Kalkspathplatten aus Versehen statt der wahren Werthe v' und v'' die in 1 dividirten zu Grund gelegt, und fand in Folge dessen statt des eigentlichen Winkels a, welcher 53° 16′ ist, wie schon bei der Erzeugung von Parabeln angegeben worden ist, den 56° 12′. Die hiernach zubereiteten Platten liessen zwar, wenn man sie einzeln untersuchte, an

den dann sich zeigenden Parabeln ihre Fehlerhaftigkeit nicht gleich beim ersten Blick erkennen, und als ich sie entgegengesetzt über einander legte, zeigten sich die in ihnen an der Weingeistflamme sichtbar werdenden, von der Mitte des Gesichtsfeldes entferntern Bänder zwar als fühlbar geradlinige, aber die der Mitte des Gesichtsfeldes zunächst liegenden flossen stellenweise, fast wie die innersten Jahre eines Holzes, in einander und nahmen dann den Anschein von sehr platt gedrückten, in sich zurücklaufenden Curven an. Aus der hier beschriebenen Unbestimmtheit der Formen in meinen Platten nahm ich Anlass, die Berechnung noch einmal vorzunehmen und den Irrthum, in welchen ich zuvor gerathen war, aufzufinden. Von da ab gaben sowohl Platten aus Kalkspath wie aus Bergkrystall, der Rechnung gemäss geschnitten, in völlig befriedigender Weise die zwar überaus empfindliche, aber gerade darum höchst schätzenswerthe Erscheinung.

Insbesondere war ich begierig, den in Ziffer IX. angeregten Umstand durch die Erfahrung constatiren zu lassen, wornach die Helligkeit der Interferenzstreifen im Allgemeinen in verschiedenen Radien des Gesichtsfeldes sich successive abändert, wiewohl in dem Maasse weniger, je kleiner der grösste Einfallswinkel in Vergleich zu dem Winkel ist, den die optischen Axen der Platten mit den Normalen zu ihren Oberflächen machen. Aus diesem letztern Grunde durfte ich bei Platten, deren Oberflächen beträchtlich schief gegen die optische Axe gestellt waren, kaum hoffen, jene Abänderung festhalten zu können; weil indessen die Betrachtungen der Ziffer XXXI. mittelst der Gleichung (4. b) gezeigt hatten, dass in gekreuzt über einander gelegten Platten die Unterschiede zwischen F und $\omega'-\omega$ eine der ersten Potenz von $\frac{\sin. i}{\sin. a}$ proportionale Grösse annehmen, so wollte ich doch einem Versuche mit Platten, deren Oberflächen eine Neigung von 45° zur optischen Axe hatten, nicht aus blosser Furcht vor dessen Nichtgelingen ausweichen, und fand durch ihn jene Aussage der Rechnung besser noch, als ich

es selber zu hoffen wagte, als eine Thatsache bestätigt. Stellte ich die rechtwinklig gekreuzten, gleich dicken und fest mit einander verbundenen Platten von Bergkrystall, deren Oberflächen eine Schiefe von 45° zur optischen Axe hatten, so zwischen die optische Zange, deren Turmaline ebenfalls rechtwinklig gekreuzt waren, dass die Mittelrichtung zwischen den Hauptnormalebenen der beiden Platten in die Mittelrichtung zwischen den Axen der beiden Turmaline fiel, wobei die sogenannten geradlinigen Interferenzstreifen im Tageslichte in ihrem grössten Glanze erschienen, und drehte ich dann die vereinigten Platten zwischen der Zange nach der einen oder andern Seite hin um, bis die Streifen beträchtlich matter wurden, setzte aber von da ab die Drehung nur mit äusserster Vorsicht und möglichst langsam weiter fort, so konnte ich und mit mir Alle, die ich darauf aufmerksam machte, recht wohl bemerken, dass die Stelle, in welcher die Streifen zum gänzlichen Verschwinden kamen, sich längs derselben von einer Seite des Gesichtsfeldes bis zur andern succesive wegschob und dem Auge als grauer völlig streifenloser Flecken erschien, neben welchem zu beiden Seiten die Streifen zwar schwach, aber doch noch vollkommen deutlich zu sehen waren. Dieser Flecken konnte durch langsames Drehen der Platten nach der einen oder andern Seite längs der Streifen hin und her gerückt werden, und ich glaube es für keine Täuschung halten zu dürfen, dass mir dieser Flecken, dessen Gränzen freilich nur sehr unbestimmt waren, eine schiefe Stellung von scheinbar 45° gegen die Streifen zu haben schien. Später fand ich, dass sich diese Ungleichförmigkeit des Entstehens oder Verschwindens der Streifen an den verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes noch besser und gleichsam im vergrösserten Maasstabe wahrnehmen lässt, wenn man dieselben Platten aus der Stellung, wo ihre Hauptnormalebenen in einander liegen und wobei sie im Tageslichte keine Streifen zeigen, so über einander wegschiebt, dass deren Hauptnormalebenen einen stets grössern Winkel mit einander bilden, bis dahin, wo die Streifen eben sichtbar zu werden

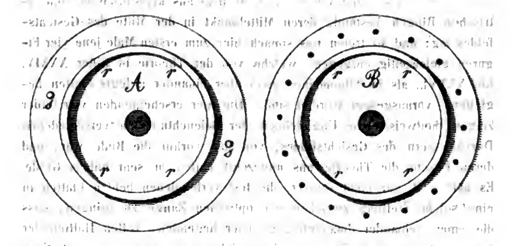
anfangen, welches dann mit einer sehr in die Sinne fallenden Ungleichheit an den verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes geschieht.

Nach diesem Resultate durfte ich mit Sicherheit erwarten, dass gedachte Ungleichheit der Beleuchtung im Gesichtsfelde längs verschiedener Radien an Platten, deren Oberflächen eine mehr senkrechte Stellung zur optischen Axe haben, in noch viel höherm Grade zum Vorschein kommen werde. Desshalb liess ich mir zu diesem Zwecke zwei Paare gleich dicker Platten aus Kalkspath anfertigen, von welchen die Oberflächen des einen 85°, des andern 80° Neigung zur optischen Axe hatten. Diese Platten gaben, einzeln untersucht, schon im gewöhnlichen Tageslicht ein Interferenzbild, dem ähnlich, das man in dergleichen senkrecht zur Axe geschnittenen Platten wahrnimmt, mit dem Unterschiede jedoch, dass der Mittelpunkt des scheinbar kreisförmigen Bildes nicht in der Mitte des Gesichtsfeldes liegt, sondern um so mehr zur Seite, je mehr die optische Axe der Platte von der senkrechten Lage zu den Oberflächen abweicht. Bei den eben angezeigten Schiefen der beiden Plattenpaare jedoch fielen die Bilder bei dem einen noch ganz und bei dem andern noch fast ganz in das Gesichtsfeld meines Polarisationsapparates. Wenn ich nun die beiden Platten von einem dieser Paare so über einander legte, dass die optischen Axen in den beiden Platten nicht mit einander parallel liefen, so zeigten sie in der optischen Zange bei gewöhnlichem Tageslichte zwei kreisförmige Bilder ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes nach der Seite hin, nach welcher die Haupt-Normalebene von einer jeden dieser Platten lag, nahehin eben so, wie wenn die beiden Platten im Polarisationsapparate neben einander hingelegt worden wären. Wodurch sich aber die jetzige Erscheinung von allen bisher zur Anschauung gebrachten unterschied, war der Umstand, dass sich in der Mitte des Gesichtsfeldes, in einer Richtung, die scheinbar senkrecht zu der die Mittelpunkte der beiden kreisförmigen Bilder verbindenden Geraden war, eine Reihe von fühlbar geradlinigen Bändern

sehen liess, die gleich weit von einander abstanden. Wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten einander gerade entgegengesetzt lagen, befanden sich die Mittelpunkte der zu beiden Seiten liegenden kreisförmigen Figuren in einem Durchmesser des Gesichtsfeldes und die Gesammterscheinung nahm das Aussehen an, von welchem die Fig. 8 eine Vorstellung zu geben bestimmt ist. Im homogenen Lichte trat zu diesen drei Figuren noch eine vierte hinzu, welche aus kreisförmigen concentrischen Ringen bestand, deren Mittelpunkt in der Mitte des Gesichtsfeldes lag; und so treten uns sonach hier zum ersten Male jene vier Figuren gleichzeitig entgegen, welche von der Theorie in Ziffer XXXIV. und XXXVI., als im Allgemeinen zwei über einander gelegte Platten begleitend, vorausgesagt worden sind. Die hier erscheinenden vier Bilder zeigen theilweise jene Ungleichheit der Beleuchtung an verschiedenen Durchmessern des Gesichtsfeldes, von der vorhin die Rede war, und deren Dasein die Theorie uns angezeigt hatte, in sehr hohem Grade. Es hält z. B. gar nicht schwer, die fest verbundenen beiden Platten in eine solche Stellung zwischen der optischen Zange zu bringen, dass die einen, einander diametral gegenüber liegenden, vollen Hälften der beiden kreisförmigen Figuren im Tageslichte fast bis auf die letzte Spur verschwunden sind, während deren andere Hälften noch lebhaft glänzend sichtbar bleiben; und man kann durch Vorwärts- oder Rückwärtsdrehen der Platten leicht nach Belieben die einen oder andern Hälften der kreisförmigen Bilder zum Verschwinden bringen, nie aber es bewirken, dass das ganze eine oder andere kreisförmige Bild zum Verlöschen kommt. Diese höchst auffallenden Abweichungen vom gewohnten Hergange fordern zu einer genauern Beschreibung solcher Versuche auf, die nun noch in den nachstehenden Blättern gegeben werden soll.

Versuche an über einander gelegten Kalkspathplatten, in welchen die optische Axe einen Winkel von 85° mit den Oberflächen machte.

Um diese Versuche mit Bequemlichkeit und doch grosser Sicherheit anstellen zu können, liess ich mir zwei messingene Scheiben A und B von der hier unten abgebildeten Grösse und Einrichtung verfertigen:



Jede dieser beiden Scheiben hatte in ihrer Mitte eine runde Oeffnung L von circa 5 Linien Weite, und auf jede war ein Ring rrrr aufgesetzt von ungefähr 1½ Linien Höhe. In die eine A waren noch ausserdem auf einem ihrer Durchmesser und in gleicher Entfernung von ihrem Mittelpunkte zwei Stiften s und s, angebracht, die aus ihr auf der dem Ringe entgegengesetzten Seite um die Metalldicke der andern Scheibe hervorragten. In diese andere Scheibe B wurden auf der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser dem mittlern Abstand der beiden Stiften s und s auf der Platte A gleich war, sechzehn gleich weit von einander entfernte Löcher eingebohrt, so dass die zwei Stiften der einen Scheibe in je zwei einander diametral gegenüberliegende Löcher der andern genau einpassten. Nachdem die beiden Scheiben auf

einander gesteckt waren, feilte ich einem der Stifte s gegenüber eine Kerbe gleichzeitig in die beiden Platten ein, um dadurch zwei bestimmte Durchmesser in ihnen zu bezeichnen. Innerhalb des Ringes rrrr der Scheibe A kittete ich über deren mittlere Oeffnung L eine von den beiden Kalkspathplatten, die ich mir eigens zu diesen Versuchen mit möglichster Sorgfalt hatte bereiten lassen, so auf, dass deren Hauptnormalebene, so viel es sich thun liess, dem Stiftendurchmesser parallel lief. Nun steckte ich die Scheibe B über die A so, dass die Kerben beider in einander, und die Ringe von beiden nach aussen lagen, klebte hierauf die andere Kalkspathplatte innerhalb des Ringes der Scheibe B über deren Oeffnung L mit Kanadabalsam an, und drehte diese Kalkspathplatte so lange über der Oeffnung L um, bis die so verbundenen beiden Scheiben zwischen der optischen Zange nur ein einziges vollkommen deutliches Bild sehen liessen, worauf ich die Scheiben horizontal hinlegte und den Kanadabalsam antrocknen liess. Auf solche Weise war ich im Stande, das Ineinanderliegen der Hauptnormalebenen der beiden Kalkspathplatten mit äusserster Genauigkeit herbeizuführen; denn die geringste Verschiebung der beiden Scheiben über einander weg, selbst wenn sie mit Augen nicht mehr sich erkennen lässt, wird Ursache, dass das eine Bild seine Reinheit verliert. Zuletzt füllte ich die Zwischenräume zwischen den Ringen und den Krystallplatten mit den Stücken zweier Korkscheiben aus, theils um die drehende Bewegung der Scheiben zwischen der optischen Zange zu erleichtern, theils um dadurch die Kalkspathplatten vor einer möglichen Beschädigung zu schützen.

Ueberdiess hatte ich die Ringe meiner optischen Zange, in denen sich die Turmaline drehen liessen, jeden in acht gleiche Theile theilen lassen, so dass die Theilstriche der beiden Ringe genau einander gegenüber lagen, und nachdem ich den einen Turmalin, der Seitenkanten von 8 Linien Länge darbot, in seinem Ringe umgedreht hatte, bis diese

drehte ich die Fassung des andern in ihrem Ringe so lange um, bis Seitenkanten mit dem cylindrischen Stiel der Zange parallel liefen, beide ihre Durchsichtigkeit ganz und gar verloren hatten, wodurch sich an einem stark leuchtenden Gegenstande die senkrechte Lage der beiden Polarisationsebenen zu einander bei meinen Turmalinen, die dick genug waren, um völlig undurchsichtig zu werden, sehr scharf bestimmen liess. Als ich aber bei dieser Lage der Turmaline jene übereinander gesteckten Scheiben mit ineinander liegenden Kerben zwischen die Zange brachte, war ich erstaunt zu sehen, dass die Arme des schwarzen Kreuzes in dem einen, dem Auge völlig deutlich entgegen tretenden Bilde nicht parallel und senkrecht zu dem Stiel der Zange gestellt, sondern merklich gegen denselben geneigt waren. Ich drehte desshalb die Fassungen der Turmaline so lange, bis diese Bedingung erfüllt und zugleich gänzliche Undurchsichtigkeit vorhanden war, fand dann aber, dass jetzt die Seitenkanten des grössern Turmalins eine recht merkliche Neigung zum Stiele der Zange angenommen hatten, die schon dem Augenmaasse nach als mehrere Grade betragend sich zu erkennen gab. Da ich den Grund von dieser sonderbaren Erscheinung in nichts Andern als in der Kleinheit von dem einen meiner beiden Turmaline suchen konnte, so nahm ich an, dass die Polarisationsebenen meines Apparats dem Stiel der Zange parallel und senkrecht darauf seien, wenn die Arme des schwarzen Kreuzes diese Lage hatten, und brachte desshalb bei dieser Stellung meines Apparats oben an den Fassungen der beiden Turmaline, am Ende ihres mit dem Stiel der Zange parallelen Durchmessers ein Zeichen an, wodurch ich in den Stand gesetzt wurde, nicht nur diese Lage immer wieder mit Leichtigkeit und Sicherheit herbeizuführen, sondern auch mittelst der an den Ringen angebrachten Theilungen eben so bequem die parallele Stellung der beiden Polarisationsebenen, so wie die mitten zwischen beiden liegende zu bewirken.

Nachdem diess alles geschehen war, brachte ich die beiden wie oben mit einander verbundenen Scheiben so zwischen die Zange, dass die Scheibe mit den Löchern dem Auge zunächst lag, und ihr Kerbendurchmesser mit ihrem Stiele parallel lief in der Weise, dass der bei der Kerbe befindliche Stift der Scheibe nach oben hin in die verlängerte Richtung desjenigen Durchmessers der Ringe fiel, der eine parallele Lage zum Stiel der Zange hatte und senkrecht auf dem stand, um welche diese Ringe drehbar eingerichtet waren. Diese Stellung des Kerbenstiftes und der beiden Scheiben wollen wir in der Folge der Kürze des Ausdrucks halber deren *normale* nennen. Bei dieser normalen Stellung der Scheiben zwischen der Zange bemerkte ich, wie ich zum Voraus schon vermuthet hatte, dass das eine in dem Apparate wahrnehmbare Bild zwar nach oben hin zur Seite von der Mitte des Gesichtsfeldes fiel, aber nicht in der Richtung des Zangenstiels, sondern in einer recht merklich nach links geneigten Richtung, desshalb drehte ich die Scheiben zwischen der Zange möglichst centrisch nach rechts, bis das Bild genau in der Richtung des Zangenstiels der Mitte des Gesichtsfeldes gegenüber lag, wobei ich fand, dass diese Bedingung erfüllt war, wenn der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile aus seiner normalen Stellung gedreht war *). Diess bewies mir, dass die Hauptnormalebenen der beiden Platten bei den so vereinigten Scheiben demjenigen ihrer Durchmesser parallel liefen, der um $1\frac{1}{4}$ Theile links zur Seite des Stiftendurchmessers lag. Diese Voruntersuchungen waren nöthig, damit ich an meinem Apparate jederzeit die Stellung der Polarisationsebenen zu einander und der Hauptnormalebene einer jeden Krystallplatte zu diesen schnell und doch hinreichend genau zu bestimmen im Stande war. Wollte ich z. B. meine Versuche an den beiden Platten unter der Vor-

*) In Kurzem werde ich noch ein genaueres Mittel, diese Abweichung zu bestimmen, angeben, durch das eigentlich die hier stehende Zahl $1\frac{1}{4}$ erhalten worden ist.

aussetzung durchführen, dass deren Hauptnormalebenen senkrecht auf einander stehen, d. h. dass $\omega = 90^\circ$ sei, so machte ich die beiden Scheiben von einander los und setzte den Kerbenstift der einen in ein Loch der andern, das um vier Zwischenräume von ihrem Kerbenloch entfernt war, worauf der zweite Stift nur in das diesem Loche diametral gegenüber stehende unterzubringen war. Beobachtete ich nun die in diesen Platten sich zeigenden Bilder, und wollte ich die Erscheinung in einer ihrer Phasen festhalten, so presste ich die Arme der Zange fest genug gegen die so verbundenen Scheiben, dass diese ihre Stellung nicht verändern konnten, und zählte dann bloss die Anzahl der Zwischenräume, um welche der Kerbenstift aus seiner normalen Lage gedreht war. Von dieser Zahl von Zwischenräumen zog ich $1\frac{1}{4}$ ab, um den Winkel zu erhalten, den die Richtung der Hauptnormalebene der ersten Platte, welche unsern Vorversuchen gemäss um $1\frac{1}{4}$ Löcher links von dem Stiftendurchmesser liegt, mit dem Stiel der Zange bildet; macht man es sich daher zum Gesetz, dem vordern Polarisationsmittel während der Versuche stets eine solche Richtung zu geben, dass seine Polarisationsebene mit dem Stiel der Zange parallel läuft, was wir bei den nun kommenden Versuchen ohne Unterlass gethan haben, so giebt jene Differenz den Winkel ω_1 zu erkennen, den die Hauptnormalebene der ersten Platte mit der vordern Polarisationsebene macht, und damit auch den ω_2, welchen die Hauptnormalebene der zweiten Platte mit der hintern Polarisationsebene macht, so wie die Stellung der beiden Polarisationsebenen gegen einander bekannt ist.

In dieser Art führte ich nun die folgenden Versuche durch, wobei ich nur noch zu bemerken habe, dass sich in den dazu gebrauchten Platten im Allgemeinen vier von einander verschiedene Bilder sehen lassen, zwei aus ringförmigen concentrischen Streifen zusammengesetzte, deren Mittelpunkte ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes liegen, diese, welche wir die *Seitenbilder* nennen wollen, gehören den beiden Platten

einzeln an, sie lassen sich leicht daran erkennen, dass sich innerhalb derselben, in zwei auf einander senkrechten Diametralrichtungen, ein weisses oder schwarzes Kreuz sehen lässt, da wo die Polarisationsebenen parallel mit einander laufen oder senkrecht auf einander stehen; ein drittes Bild besteht aus scheinbar geradlinigen Bändern, deren Richtungen fühlbar senkrecht auf der Geraden stehen, welche die Mittelpunkte der Seitenbilder verbindet, dieses werden wir kurz die *geradlinigen Bänder* nennen, und ausser diesen zeigt sich unter Umständen noch ein viertes aus ringförmigen Streifen bestehendes Bild, das sich von den beiden Seitenbildern dadurch unterscheidet, dass sein Mittelpunkt in der Mitte des Gesichtsfeldes liegt, und dass dasselbe weder ein weisses noch ein schwarzes Kreuz in sich trägt. Dieses Bild wollen wir einfach durch den Ausdruck *Centralringe* bezeichnen. Von diesen vier Bildern sind die drei ersten schon im gewöhnlichen weissen Tageslichte sichtbar, das letzte aber nur in dem viel homogenern Lampenlichte; daher werden wir zunächst blos die Erscheinungen im Tageslichte ausführlicher beschreiben und daran zuletzt das Auftreten der Centralringe im Lampenlichte knüpfen. Man wird gleich beim ersten Durchlesen dieser Versuche gewahr werden, dass sich dieselben in zwei Klassen theilen lassen. In der einen Klasse treten nämlich die Seitenbilder bei jeder Stellung der Scheiben in gleicher Stärke auf, welche Stärke jedoch mit der Stellung der Scheiben sich stets ändert und innerhalb eines rechten Winkels von der geringsten bis zur möglich höchsten übergeht; diese Klasse tritt da auf, wo die beiden Polarisationsebenen eine parallele oder senkrechte Stellung zu einander haben. Während in dieser Klasse die Stärke der Seitenbilder immer gleichzeitig zu- oder abnimmt, nimmt in der andern Klasse das eine Seitenbild an Stärke zu, wenn das andere an Stärke abnimmt, und umgekehrt; diese zweite Klasse tritt da auf, wo die beiden Polarisationsebenen unter einem Winkel von 45° oder 135° gegen einander gestellt sind. In beiden Klassen von Erscheinungen tritt immer die bei irgend einer Stellung der Scheiben zwischen der Zange

sich zeigende Gesammtfigur wieder völlig in der gleichen Weise auf, wenn der Kerbenstift in den vereinigten Scheiben um 4 Löcher, d. h. um einen rechten Winkel weiter gerückt wird.

I. *Versuche im Tageslichte, wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten in einander liegen und*

a) *die beiden Polarisationsebenen parallel mit einander laufen.* Liegt der Kerbenstift $1\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normalstellung, so zeigt sich ein einziges Bild mit weissem Kreuze zur Seite von der Mitte des Gesichtsfeldes in der Richtung des Zangenstieles nach oben hin; *sind hingegen*

b) *die beiden Polarisationsebenen senkrecht gegen einander gestellt* und liegt der Kerbenstift wieder $1\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normalstellung, so zeigt sich ein einziges Bild mit schwarzem Kreuze zur Seite von der Mitte des Gesichtsfeldes in der Richtung des Zangenstiels nach oben hin; *sind endlich*

c) *die beiden Polarisationsebenen unter* 45° *oder* 135° *gegen einander gestellt* und liegen die verbundenen Scheiben zwischen der Zange eben so wie in den Fällen a) und b), so zeigt sich ein einziges aus 8 Sectoren bestehendes Bild längs 4 um 45° aus einander liegenden Durchmessern unterbrochen, welches von der Mitte des Gesichtsfeldes aus nach oben hin in der Richtung des Zangenstieles liegt.

Diese Bilder sind sämmtlich genau die gleichen, wie sie in einer einzigen solchen Platte bei gleicher Stellung der Polarisationsebenen entstehen, deren Dicke die Dicken dieser beiden in sich enthält; daher sind sie kleiner als sie in jeder der Platten einzeln gesehen werden. Diese Bilder umkreisen während einer Umdrehung der vereinigten Scheiben

zwischen der Zange die Mitte des Gesichtsfeldes, stets in der gleichen Entfernung von dieser Mitte sich zeigend.

II. *Versuche im Tageslichte, wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten eine gerade entgegengesetzte Lage haben und*

a) *die beiden Polarisationsebenen parallel mit einander laufen.* Lag der Kerbenstift $1\frac{1}{4}$ Theile rechts, so zeigten sich zwei Seitenbilder mit weissen Kreuzen in der Richtung des Zangenstiels *) und scheinbar senkrecht auf der die Mittelpunkte dieser Bilder verbindenden Geraden die geradlinigen Bänder, wobei alle drei Figuren ihre grösste Deutlichkeit besassen; lag aber der Kerbenstift um $3\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normalstellung ab, so waren alle drei Bilder matt, die Seitenbilder sehr verkümmert und die geradlinigen Bilder zu beiden Seiten der die Mittelpunkte der Seitenbilder verbindenden Geraden *durch weisse Flecken von ziemlicher Ausdehnung unterbrochen.* Im erstern Fall ist der Winkel $\omega_1 = 0^0$ und im andern Falle ist $\omega_1 = \frac{1}{4}\pi$. Dieselben Bilder kehren ganz in der gleichen Weise wieder jedesmal, wenn der Kerbenstift um 4 Theile oder einen rechten Winkel weiter gedreht wird; es erscheinen also die deutlichsten Bilder da, wo ω_1 eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$ und am undeutlichsten da, wo ω_1 eine von den Formen $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ hat. *Waren hingegen*

*) Die Lage der beiden Bilder längs des Zangenstiels in a) und b) lässt sich mit grosser Sicherheit bestimmen, und durch dieses Mittel lässt sich die Abweichung der Hauptnormalebene in der Stiftenplatte von dem Stiftendurchmesser mit grosser Genauigkeit auffinden, wie es auch von uns hierzu benützt worden ist.

b) *die beiden Polarisationsebenen senkrecht gegen einander gestellt* und stand der Kerbenstift wieder um $1\frac{1}{4}$ Theile von seiner Normallage rechts ab, so zeigten sich zwei Seitenbilder mit schwarzen Kreuzen in der Richtung des Zangenstiels und darauf senkrecht die geradlinigen Bänder mit derselben Deutlichkeit wie in a); lag aber der Kerbenstift $3\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normalstellung ab, so hatten die 3 Bilder ihre grösste Schwäche erreicht, die beiden Seitenbilder waren sehr verkümmert und in die geradlinigen Bänder hatten sich zu beiden Seiten der die Mittelpunkte der Seitenbilder verbindenden Geraden *schwarze Flecken von beträchtlicher Grösse* hineingezogen, durch die sie eine Unterbrechung erlitten. Auch hier zeigten sich wieder die gleichen Bilder in der gleichen Weise jedesmal, wenn der Kerbenstift um vier Theile rechts weiter geführt wurde, es zeigten sich also die deutlichsten Bilder immer da, wo ω_1 eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$ hatte, die undeutlichsten da, wo ω_1 eine von den Formen $(a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ annahm. *Waren endlich*

c) *die beiden Polarisationsebenen unter einem Winkel gegen einander gestellt, der* 45° *oder* 135° *betrug,* und stand der Kerbenstift $1\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normallage ab, so zeigte sich das, der dem Auge zugekehrten Platte entsprechende Seitenbild am deutlichsten, das der andern Platte entsprechende am undeutlichsten und stark verkümmert und die geradlinigen Bänder, welche in nicht sehr grosser Deutlichkeit auftraten, waren zu beiden Seiten *auf kurze Strecken unterbrochen,* und es schienen sich aus den dunklern Sectoren des deutlichsten Seitenbildes *Schatten in sie hinein zu ziehen.* Die beiden Seitenbilder bei dieser Stellung der Scheiben lagen in der Richtung des Zangenstiels und das deutlichste von beiden war aus 8 Sectoren zusammengesetzt. Stand der Kerbenstift $3\frac{1}{4}$ Theile von seiner Normallage

ab, so war das, der dem Auge zugewandten Platte entsprechende Seitenbild sehr undeutlich und stark verkümmert, das der andern Platte entsprechende dagegen war am deutlichsten. Die geradlinigen Bänder waren nur mitteldeutlich und auch hier wieder zu beiden Seiten *auf kurze Strecken unterbrochen, an andern beschattet.* Jede von diesen Erscheinnngen kehrte völlig in der gleichen Weise wieder jedesmal, wenn der Kerbenstift um vier Theile, also um einen rechten Winkel rechts weiter fortgeführt wurde, so dass das Seitenbild in der dem Auge zugekehrten Platte am deutlichsten, das andere am verkümmertsten wurde da, wo ω_1 eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$ annahm, dagegen ersteres am verkümmertsten und letzteres am deutlichsten, wo ω_1 in eine von den Formen $(a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ übergieng.

Die Seitenbilder hatten bei dieser Stellung der Hauptnormalebenen beider Platten dieselbe Beschaffenheit, wenigstens sehr nahe hin, wie die in den Versuchen I. beschriebenen bei der gleichen gegenseitigen Stellung der Polarisationsebenen, sie waren jedoch grösser, so gross, wie sie sich in den Platten einzeln sehen lassen, und drehten sich sämmtlich um die Mitte des Gesichtsfeldes, (die Seitenfiguren stets in der Richtung ihrer Normalebenen zur Seite liegen bleibend), während die Scheiben zwischen der Zange eine Umdrehung erlitten.

III. *Versuche im Tageslichte, wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten senkrecht auf einander stehen und*

a) *die beiden Polarisationsebenen parallel mit einander laufen.* Die beiden Seitenfiguren, welche mit weissen Kreuzen versehen waren, lagen in der Richtung des Zangenstiels, und zeigten sich dabei am deutlichsten und von gleicher Stärke, wenn der Kerbenstift um $3\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner Normallage abstand,

und auch die geradlinigen Bänder waren bei dieser Stellung am deutlichsten; hingegen waren alle Bilder am verkümmertsten und in den geradlinigen Bändern zeigten sich zu beiden Seiten von der Mitte des Gesichtsfeldes *die weissen Flecken*, wenn der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile rechts abgedreht war. Jedenfalls bestätigen die Versuche auch hier wieder, dass die Stellungen der Scheiben im Falle der deutlichsten und undeutlichsten Bilder um $\frac{1}{4}\pi$ aus einander liegen, und dass die Aufeinanderfolge der beiden Stellungen hier dieselbe ist wie in II. a. Auch hier kamen die beiden Bilder in derselben Weise wieder zum Vorschein, wenn der Kerbenstift um einen rechten Winkel nach der rechten Seite hin fortgeführt wurde, und es traten da, wo sich die undeutlichsten Bilder zeigen, in den geradlinigen Bändern zu beiden Seiten von der Mitte des Gesichtsfeldes ebenfalls *die weissen Flecken* auf. *Machten aber*

b) *die beiden Polarisationsebenen einen rechten Winkel mit einander*, so traten die beiden Seitenbilder mit schwarzen Kreuzen in grösster Deutlichkeit auf, wenn sie in der Richtung des Zangenstiels lagen, welches geschah, wenn der Kerbenstift um $3\frac{1}{4}$ Theile von seiner Normallage abstand, in welcher Stellung auch die geradlinigen Bänder deutlich waren; dagegen zeigten sich sämmtliche Bilder am verkümmertsten, die geradlinigen mit *grossen schwarzen Flecken* auf beiden Seiten, wenn der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile von seiner Normallage abstand. Es waren hier die Bilder am deutlichsten und undeutlichsten bei denselben Stellungen der Scheiben zwischen der Zange wie in a). *Machten endlich*

c) *die beiden Polarisationsebenen einen halben rechten Winkel mit einander*, so zeigte sich das, der dem Auge zugewandten Platte

angehörige Seitenbild am deutlichsten, das andere am undeutlichsten, wenn der Kerbenstift um $3\frac{1}{4}$ Theile von seiner Normalstellung ablag, und die geradlinigen Bänder traten bei dieser Stellung der Scheiben mit nicht beträchtlicher Deutlichkeit auf, *stellenweise unterbrochen, an andern wie beschattet* aussehend. Wurde der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile nach der rechten Seite hin aus seiner Normallage verstellt, so zeigte sich das Seitenbild der vom Auge abgewandten Platte am deutlichsten, das andere am undeutlichsten, und die geradlinigen Bänder mit mittlerer Deutlichkeit, *stellenweise unterbrochen und andern Stellen wie beschattet* aussehend.

Die Seitenbilder waren in allen diesen Fällen von der gleichen Beschaffenheit, wie in der Versuchsreihe II. bei gleicher Stellung der Polarisationsebenen. Da aus den Versuchen II. hervorgeht, dass die Hauptnormalebene der in der Stiftenscheibe befestigten Platte in der Richtung des Zangenstieles liegt, wenn der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile rechts von dieser Richtung abliegt, so macht diese Hauptnormalebene da, wo der Kerbenstift um $1\frac{1}{4}$ Theile rechts von seiner normalen Stellung abliegt, mit der Richtung des Zangenstieles, wenn nicht völlig genau, doch jedenfalls sehr nahe den Winkel o, und da, wo der Kerbenstift um $3\frac{1}{4}$ Theile von seiner normalen Lage rechts absteht, ist dieser Winkel $\frac{1}{4}\pi$; und da auch hier wieder dieselben Bilder in völlig gleicher Weise wiederkehren jedesmal, wenn der Kerbenstift um einen rechten Winkel rechts weiter fortgeführt wird, so nimmt ω_1 eine der Formen $(a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ an, wenn die in a) und b) beschriebene Bilder am deutlichsten, oder wenn das in c) erwähnte Seitenbild der dem Auge zunächst liegenden Platte am deutlichsten ist; hingegen tritt ω_1 in eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$, da wo die in a) und b) beschriebenen Bilder am undeutlichsten werden, oder das in c) erwähnte andere Seitenbild der vom Auge abgewandten Platte am deutlichsten erscheint.

IV. *Versuche im Tageslichte, wenn die Hauptnormalebenen der beiden Platten einen Winkel von 135° mit einander machen*) und*

a) *die Polarisationsebenen einander parallel liegen.* Die drei Bilder zeigten sich am deutlichsten, wenn die beiden mit weissem Kreuze versehenen Seitenbilder parallel mit dem Zangenstiele lagen und dann lag der Kerbenstift um 2¼ Theile rechts von seiner Normalstellung ab; lag aber dieser Kerbenstift um 4¼ Theile von seiner Normalstellung ab, so waren die beiden Seitenbilder am verkümmertsten, und in die geradlinigen Bänder zogen von beiden Seiten *grosse weisse Flecken* ein. *Machten aber*

b) *die Polarisationsebenen einen rechten Winkel mit einander,* so zeigten sich wieder die drei Bilder am deutlichsten, wenn die beiden, jetzt mit schwarzen Kreuzen versehenen, Seitenbilder eine mit dem Zangenstiele parallele Lage hatten, und dann lag der Kerbenstift um 2¼ Theile rechts von seiner normalen Stellung; wurde aber dieser Stift um 4¼ Theile von seiner normalen Stellung rechts abgeführt, so zeigten sich alle drei Bilder am undeutlichsten und verkümmertsten, und in die geradlinigen Bänder zogen auf beiden Seiten von der Mitte des Gesichtsfeldes *grosse schwarze Flecken* ein. *Machten endlich*

c) *die beiden Polarisationsebenen einen Winkel von 45° oder von 135° mit einander* und wurde der Kerbenstift um 2¼ Theile von seiner normalen Lage rechts abgeführt, so zeigte sich das

---

*) Es können auch die Hauptnormalebenen einen Winkel von 45° mit einander machen, weil aber in diesem Falle die Seitenbilder stark in einander greifen, wodurch die Gesammterscheinung verworrener wird, so habe ich es vorgezogen, diesen Fall ausser Betrachtung zu lassen.

Seitenbild, welches der dem Auge zunächst liegenden Platte entspricht, am deutlichsten, das andere oben liegende am undeutlichsten und verkümmert, und die geradlinigen Bänder waren wenig deutlich, zu beiden Seiten mit kurzen *unterbrochenen und andern beschatteten* Stellen versehen; wurde aber der Kerbenstift um $4\frac{1}{2}$ Theile rechts von seiner normalen Stellung abgeführt, so zeigte sich das Seitenbild, welches der vom Auge abgewandten Platte angehört, am deutlichsten, das andere nach unten liegende am undeutlichsten und verkümmert, und die geradlinigen Bänder hatten nur eine geringe Deutlichkeit und waren zu beiden Seiten *durch kurze verbleichte und andere beschattete Stellen unterbrochen.* In der Mitte zwischen zwei nächsten Stellen grösster Deutlichkeit des einen und des andern Seitenbildes treten beide gleich deutlich auf.

Alle drei Bilder giengen hier, wie schon in den Versuchen II. und III., während einer Umdrehung der vereinigten Scheiben zwischen der Zange in derselben relativen Stellung gegen einander rings um die Mitte des Gesichtsfeldes herum, und nach jeder Drehung um 45° fand ein allmähliger Uebergang von einer der in a) bis c) angezeigten Phasen der Erscheinung in die andere statt. Die Winkel ω_1, welche der einen oder andern dieser Phasen entsprachen, hatten hier die Formen $(a+\frac{1}{4})\frac{\pi}{2}$ und $(a+\frac{3}{4})\frac{\pi}{2}$, wenigstens nahe hin; und da wo ω_1 in eine von den Formen $(a+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ übergieng, nahmen beide Seitenbilder einerlei Deutlichkeit an.

Die um die Mitte des Gesichtsfeldes wahrnehmbaren centralen Ringe zeigen sich nicht im Tageslichte; *man findet sie jedoch jedesmal an der Weingeistflamme, wenn man den vereinigten Scheiben eine von jenen Stellungen zwischen der optischen Zange giebt, wobei die Versuche im Tageslichte die geradlinigen Bänder nur mit geringer Deutlichkeit sichtbar*

werden lassen, und Spuren davon auch bei jenen Stellungen der Scheiben, wo die geradlinigen Bänder im Tageslichte sich schon in beträchtlicherer Stärke sehen lassen. Weil jedoch hier die drei vorigen Bilder sich zugleich mit diesem vierten sehen lassen und zwar noch in viel grösserer Ausdehnung als im Tageslichte, so findet man die centralen Ringe von den Streifen der drei übrigen Bilder in den zu den vorstehenden Versuchen genommenen Platten stets mehr oder weniger durchkreuzt. Hier am Ende der Versuche habe ich auch noch darauf aufmerksam zu machen, dass keines von den viererlei Bildern selbst da, wo es sich am deutlichsten zeigt, an allen Stellen völlig dieselbe Deutlichkeit in sich trägt, was wir schon in der ersten Hälfte dieser Abhandlung als eine Eigenschaft solcher Platten, deren optische Axe nahe senkrecht auf ihren Oberflächen steht, angezeigt haben, eine Eigenschaft, welche die Platten, deren optische Axen genau senkrecht auf ihren Oberflächen stehen, im höchsten Grade besitzen, bei diesen aber, weil die Ungleichheit in einer völlig symmetrischen Weise auftritt, mit geringer Gewalt dem Auge entgegen tritt. Noch muss ich eines sonderbaren Umstands gedenken, auf den man bei den vorstehenden Versuchen in den Fällen II. d, III. d und IV. d hingeführt wird. Die Seitenfiguren in allen diesen Fällen sind stets aus acht Sectoren zusammengesetzt, von denen vier aus hellern Streifen bestehende abwechselnd vier aus dunklern, aber keineswegs minder deutlichen Streifen gebildete, zwischen sich haben. Da nun, wo eines dieser Bilder am undeutlichsten wird, sind immer die dunklern Sectoren aus ihm völlig verschwunden, dagegen die hellern, jedoch auf einer Seite des Bildes dunkler werdend, mit nicht sehr schwachem Glanze, mindestens zum Theile, noch vorhanden. Sehr merkwürdig ist es, dass die Richtungen der deutlichsten Seitenbilder in den Versuchen III. und IV., wo der Winkel ω_0 nach rechts oder links hin genommen werden konnte, in den beiderlei Fällen senkrecht auf einander standen; daher fügen wir noch bei, dass in den vorhergehenden Versuchen die Hauptnormalebene der Löcherplatte

um die angezeigten Winkel stets rechts von der Hauptnormalebene der Stiftenplatte lag.

Kommt man auf den Gedanken, die vorstehenden Versuche an die in den Gleichungen (2. a) bis (2. c) der Ziffer XXXVII. niedergelegten Resultate der Rechnung zu halten, so stösst man auf nichts als Widersprüche. Aus jenen Gleichungen geht erstlich hervor, wie gleich hinter ihnen ausgeführt worden ist, dass da, wo $\omega_0 = 90^0$ ist, von allen vier Bildern nur das eine zu T_3 gehörige übrig bleibt, und dass da, wo $\omega_0 = 180^0$ ist, von allen vier Bildern nur das eine zu T_4 gehörige übrig bleibt, und zwar bei jeder Stellung der vereinigten Platten zwischen der optischen Zange. Die Versuche II. und III. widersprechen dieser Behauptung der Formeln in allen ihren Punkten, indem sich die Gesammterscheinung nur in den Versuchen I., wo die Hauptnormalebenen der beiden Platten in einander liegen, auf ein einziges Bild zurückzieht. Von diesem Zwiespalt betroffen, habe ich jene unter 45° gegen die optische Axe geschnittenen Platten, an denen ich zuerst die concentrischen Ellipsen ohne Kreuz wahrnahm, wieder hervorgesucht, und mich überzeugt, dass da, wo sich in ihnen die Ellipsen am kräftigsten sehen lassen, in der That keine Spur von andern Streifen aufzufinden ist; ferner dass wenn auch durch Drehung der verbundenen Platten zwischen der Zange solche Spuren, die immer nur mit höchster Mühe aufgefunden werden können, zum Vorschein kommen, diess mit mehr Grund einem nicht ganz genauen Uebereinanderliegen der Platten als irgend einer andern Ursache zugeschrieben werden müsse, da man bei so schief geschnittenen Platten nicht das äusserst zarte Kennzeichen des genauen Ineinanderliegens der Hauptnormalebenen zweier Platten in Anwendung bringen kann, welches von uns bei den vorstehenden Versuchen benützt worden ist. Eben so habe ich die Normalebenen jener Platten unter einem rechten Winkel gegen einander gestellt, wobei sie die geradlinigen Bänder im Tageslichte zwar schmal, jedoch mit grosser Schärfe zeigten, und konnte

bei dieser Stellung der Platten an der Weingeistlampe nicht die leiseste Spur von den Ellipsen finden, selbst wenn ich den vereinigten Platten die verschiedensten Stellungen zwischen der Zange gab. Die beiden Seitenbilder können in so schief geschnittenen Platten schon desswegen nicht zur Wahrnehmung gelangen, weil sie zu weit von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt liegen, um in dieses noch Spuren von ihrem Dasein schicken zu können. Also hier volle Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Rechnung, dort lauter Widerstreit.

Aber noch mehr. — Ist $\omega_0 = (a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$, so sagen die in Ziffer XXXVII. gegebenen Ausdrücke von T_1 und T_2 aus, dass ihre absoluten Werthe, und damit die Deutlichkeiten der zur ersten und zweiten Platte gehörigen Seitenbilder den Producten

$$\sin. 2\omega_1 \cos. 2\omega_2 \text{ und } \sin. 2\omega_2 \cos. 2\omega_1$$

proportional seien. Hat nun noch A eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$, d. h. stehen die Polarisationsebenen senkrecht auf einander oder laufen sie parallel mit einander, so muss der Gleichung (2. c) in Ziffer XXXVII. zur Folge $\omega_1 + \omega_2$ nothwendig von der Form $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ seyn, also muss von den Grössen ω_1 und ω_2 die eine die Form $a\frac{\pi}{2}$ annehmen, so wie der andern die Form $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ gegeben wird. Bringt man es daher durch Drehung der vereinigten Scheiben zwischen der optischen Zange dahin, dass ω_1 die Form $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ erhält, so ist ω_2 von der Form $a\frac{\pi}{2}$ und dann wird das erste der vorstehenden Producte ± 1, nimmt also seinen grössten absoluten Werth an, während das andere von jenen Producten o wird, somit seinen kleinsten absoluten Werth annimmt. Bringt man es hingegen durch Drehung der vereinigten Scheiben zwischen der optischen Zange dahin, dass ω_1 in eine von den Formen $a\frac{\pi}{2}$ tritt, so muss ω_2 in eine von den Formen $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ übergehen und nun wird das erste

von jenen beiden Producten null, während das andere seinen grössten Werth $+1$ erhält. *Jene Gleichungen geben also zu erkennen, dass da, wo $\omega_1 = 135^0$ und $A = o$ oder $= 90^0$ ist, von den beiden Seitenbildern abwechselnd das eine und das andere am stärksten hervortreten müsse, und dass, wo das eine am deutlichsten sich zeigt, das andere verschwunden seyn muss.* — Ist wieder $\omega_0 = (a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$, und hat A ebenfalls eine von den Formen $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$, so muss der Gleichung (2. c) XXXVII. zur Folge $\omega_1 + \omega_2$ nothwendig von einer der Formen $a\frac{\pi}{2}$ seyn, also können ω_1 und ω_2 beide zugleich entweder von der Form $a\frac{\pi}{2}$ oder von der $(a + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ seyn; in jedem dieser beiden Fälle aber werden die zwei obigen Producte beide zugleich null, was nichts anders sagt, als dass bei diesen Stellungen der vereinigten Platten keines von den beiden Seitenbildern sich sehen lassen kann. In den Stellungen der Scheiben aber, wo ω_1 in eine der Formen $(a + \frac{1}{4})\frac{\pi}{2}$ oder $(a + \frac{3}{4})\frac{\pi}{2}$ übergeht, muss ω_2 eine von den Formen $(a + \frac{3}{4})\frac{\pi}{2}$ oder $(a + \frac{1}{4})\frac{\pi}{2}$ haben, dann werden jene beiden Producte einander gleich und gleich $\frac{1}{2}$. *Jene Gleichungen sagen also aus, dass da, wo $\omega_1 = 135^0$ und $A = 45^0$ oder $= 135^0$ ist, die beiden Seitenbilder in den Platten mit gleicher Deutlichkeit sich sehen lassen müssen, von der Stärke $\frac{1}{2}$ bis zu der o hin.* Man sieht, dass diese beiden Aussagen besagter Gleichungen im völligen Widerstreite mit den in IV. a) bis c) mitgetheilten Versuchen stehen, denn letztere zeigen da stets gleiche Bilder an, wo erstere Bilder von der grössten Ungleichheit voraussagen, und umgekehrt.

Eine Abweichung der in Ziffer XXXVII. aufgestellten Gleichungen von obigen Versuchen kann uns nicht gerade sehr befremden, da uns unsere Rechnung selber oft genug daran erinnert hat, dass man sich auf sie bei Platten, wie sie zu jenen Versuchen verwendet worden sind, nicht mehr mit Sicherheit verlassen könne, aber eine so totale Umkeh-

rung der Erscheinungen auf den beiden Wegen kann wohl den Muthigsten betroffen machen. Gleichwohl durfte ich diesen Gegensatz in den Aussagen hier nicht verschweigen, um meine Nachfolger in der Behandlung desselben Gegenstandes darauf aufmerksam zu machen, dass hier noch eine reiche Ernte zu machen ist. Ich für meine Person blicke mit voller Seelenruhe in die Zukunft, denn ich habe es mir zum Gesetze gemacht, in solchen Dingen theoretisch keinen Schritt vorwärts zu thun, bis der zuvor gemachte von der Erfahrung gut geheissen worden ist, und weiss daher gewiss, dass meine theoretischen Angaben in der Weite, die sie selber überall scharf bezeichnet haben, völlig richtig sind, in so weit nämlich unsere Sinne darüber ein Urtheil fällen können. Um dieses mein felsenfestes Vertrauen auch auf Denjenigen überzutragen, der vielleicht eine Fortsetzung dieser Rechnungen auf sich zu nehmen gedenket, und dem, der dieses unternimmt, thut ein solches Vertrauen Noth, weil ausserdem Arbeiten von so schwieriger Art nicht leicht von Statten gehen, so will ich noch einen ganz speciellen Fall in der Kürze hier selber reden lassen. Wir haben nämlich schon in der ersten Hälfte dieser Abhandlung kurz vor dem Schlusse der Ziffer IX. gezeigt, dass da, wo $\text{tg.}\,i\cos.\omega = \text{tg.}\,a$ auch nur nahehin werden kann, die dortigen Näherungsgleichungen nicht mehr benützt werden können. An solchen Stellen des Gesichtsfeldes wird $\sin^2.\psi = 1$ und dann den genauen Gleichungen (7. d) der dortigen Ziffer VIII. gemäss $\cos.\psi' = \sin.a$, woraus sich $\sin.\psi' = \cos.a$ ergiebt; weil ferner $\sin^2.\psi = 1$ zeigt, dass $\cos^2.\psi = 0$ und $\text{tg}^2.\psi = \infty$ ist, so wird an diesen Stellen den dortigen Gleichungen (7. e) zur Folge $\mu = \pm 90^0$ und $\nu = \pm 90^0$, desshalb verwandeln sich hier die dortigen Gleichungen (7. f) in:

$$\cos.\varphi_1 = \cos.(\omega_1 \pm 90^0)\cos.a \text{ und } \cos.\varphi_2 = -\cos.(\omega_1 \pm 90^0 - A)\cos.a.$$

Sollen aber im Gesichtsfelde liegende Punkte die Bedingung $\text{tg.}\,i\cos.\omega = \text{tg.}\,a$ erfüllen können, so darf a kein anderer als nur ein sehr kleiner Winkel seyn und diess zieht nach sich, dass cos. a an allen sichtbaren

solchen Stellen sehr nahe 1 ist, wesshalb die beiden vorstehenden Gleichungen sehr nahe geben:

$$\cos.\varphi_1 = \cos.(\omega_1 \pm 90^0) \text{ und } \cos.\varphi_2 = -\cos.(\omega_1 \pm 90^0 - A),$$

während wir bei Platten, deren optische Axen beträchtlich schief gegen ihre Oberflächen stehen, μ an allen Stellen des Gesichtsfeldes als einen nur kleinen Winkel erkannt haben, so dass bei diesen, den dortigen Gleichungen (3. a und b) entsprechend, nahehin

$$\cos.\varphi_1 = \cos.\omega_1 \text{ und } \cos.\varphi_2 = -\cos.(\omega_1 - A)$$

ist. Während also bei diesen Platten die Winkel φ_1 und φ_2 sehr nahe denen ω_1 und ω_2 gleich sind, weichen sie an den bezeichneten Stellen jener Platten um fast einen rechten Winkel davon ab; halb so grosse Differenzen aber sind vollkommen hinreichend, die Kluft auszufüllen, welche sich zwischen unsern letzten Versuchen und den abgekürzten Gleichungen unserer Rechnung aufgethan hat. Die Eigenthümlichkeit der hier hervorgehobenen Stellen muss nämlich auch allen in ihrer Nähe liegenden, wenn schon in geringerm Grade, zukommen.

Ich schliesse nun mein Pensum mit der Besprechung von noch ein Paar in dessen Gränzen liegenden Thatsachen ab. Ich stiess wiederholt im Laufe meiner Versuche an Krystallplatten aus Bergkrystall, die eine Schiefe von 45° zur optischen Axe hatten, auf die Formen, welche in dem Supplementbande zu Poggendorffs Annalen, der in der Vorerinnerung zur zweiten Hälfte dieser Abhandlung erwähnt worden ist, auf dessen Tafel V. durch Herrn Langberg eine Abbildung in den Figuren 17. 18. und 19. gefunden haben, so wie auf deren Uebergänge in einander, war aber dabei in den Irrthum gefallen, als seien sie bloss ein Erzeugniss des an diesem Minerale exceptionell auftretenden Drehungsvermögens und liess sie daher auf der Seite liegen, so wie ich überhaupt sämmtliche aus diesem Drehungsvermögen hervorgehende Modificationen nur gelegentlich und im Vorübergehen besprochen habe. In

diesen Irrthum war ich durch eine doppelte Veranlassung geführt worden, einmal weil ich auf solche Formen nie bei den analogen Versuchen mit Kalkspathplatten gestossen bin, und dann noch, weil diese Formen in den Quarzplatten durch Drehung derselben zwischen der optischen Zange sich mir zu verändern schienen, eine Eigenthümlichkeit, die ich damals noch an den gewöhnlichen einaxigen Krystallen für unmöglich hielt. Seit ich jedoch Herrn Langbergs elegante Ableitung dieser Formen aus den gewöhnlichen Gleichungen in dem gedachten Supplementbande gelesen habe, bin ich anderer Ansicht geworden und zu dem Glauben gekommen, dass jene Gestalten ein allen einaxigen Krystallen zukommendes Eigenthum seien, sich mir aber in meinen Kalkspathplatten ihrer grossen Feinheit halber ganz und gar entzogen haben. — Die im Tageslichte an Kalkspathplatten sich zeigende dreifache Figur, von welcher in den letzten Versuchen die Rede war, und die ich in Fig. 8. abzubilden versucht habe, wollte ich auch in meinen Quarzplatten beobachten, deren Oberflächen die gleiche Neigung zur optischen Axe wie bei jenen hatten, und war höchlich erstaunt, als ich dieselben mit entgegengesetzt liegenden Hauptnormalebenen zwischen die optische Zange gebracht hatte, eine total andere Figur zu finden, als die in Fig. 8. abgebildete ist. Es ist mir nicht möglich, die in solchen Quarzplatten auftretende Erscheinung auch nur annähernd zu beschreiben, wer sie genau kennen lernen will, thut besser, den Steinschneider zur Hilfe zu nehmen, um sie mit seinen eigenen Augen beliebig lang zergliedern zu können. Man erblickt in diesen Platten schwach, ungefähr wie die Bögen der Baschkiren gekrümmte Bänder in Massen, die ein stabartiges Aussehen haben und stellenweise plötzlich abgebrochen sind, an diesen Stellen aber wie Fackeln mit einer Flamme versehen zu seyn scheinen. Im ersten Augenblicke wird man von der Neuheit dieser Erscheinung dermassen betroffen, dass man gar nichts, was an die Fig. 8. erinnern könnte, zu sehen glaubt; bei aufmerksamerer Besichtigung des Bildes aber wird man doch gewahr, dass ihm diese untergelegt ist, jedoch

durch die allerwärts hingeworfenen Stäbe zugedeckt wird, und daher nur aus abgerissenen Fragmenten, welche tief im Hintergrunde liegen, zusammen geklaubt werden kann, und dass die flammenartigen Gebilde, welche an den abgebrochenen Enden der Stäbe erscheinen, nichts anders sind, als ganz kurze Strecken der prismatisch gefärbten, kreisförmigen Ringe von den Seitenfiguren in der Breite der Stäbe, welche hier mit erhöhtem Glanz auftreten, während die weiter davon abliegenden Stellen derselben kreisförmigen Ringe fast gänzlich erloschen sind. Wer diese Erscheinung aus irgend einer Hypothese über die individuelle Natur des Bergkrystalls heraus rechnet, darf in gerechtem Stolze zu sich selber sagen: „Ich habe das Rechte getroffen", zumal wenn in seinen Formeln auch die zu Ende der Ziffer XXXIX. angeführte Thatsache liegt.

Berichtigungen zu der vorstehenden zweiten Hälfte.

NB. Die in Klammern geschlossenen Seiten-Zahlen beziehen sich auf den Band der Denkschriften, die nicht eingeschlossenen auf die Abhandlung.

Seite (271) 7 Zeile 8 v. o. „Projection der gegebenen Richtung" anstatt „projicirte Richtung".
„ „ „ „ 12 „ „ „gesuchten Projection" anstatt „projicirten Richtung".
„ (274) 10 zwischen Zeile 4 u. 5. v. u. ist anzuhängen: „während man stets $K = 1$ findet".
„ (281) 17 Zeile 1 v. u. „aussergewöhnliche" anstatt „gewöhnliche".
„ (282) 18 „ 1 v. o. „gewöhnlichen" anstatt „aussergewöhnlichen".
„ „ „ „ 2 „ „ sind I. und II. mit einander zu vertauschen.
„ (302) 38 „ 5 „ „ ist nach $\theta' - \theta$ einzuschalten „oder $\theta + \theta'$".
„ (304) 40 „ 5 v. u. ist das Doppelzeichen umzukehren.
„ (331) 67 „ 5 u. 6 v. u. ist λ anstatt ν zu setzen.
„ (350) 86 „ 11 v. u. ist hinter dem Worte Turmaline beizufügen: und in der Schwierigkeit, die Lage der Hauptnormalebene in jeder Platte einzeln genau zu bestimmen.

Im Interesse meiner Leser schicke ich die von gelehrten Freunden mir mitgetheilten zur ersten Hälfte dieser Abhandlung gehörigen Verbesserungen nach.

O.

Seite (51) 14 Zeile 3 ist bei der dort stehenden Gleichung die Note beizufügen: „Diese Gleichung ist blos annähernd wahr, sie kann jedoch auf so lange als ein Bild für den eigentlichen Hergang dienen, bis dieser vollständig erkannt seyn wird".
„ (6) 23 „ 18 „wie eine von x um λ" anstatt „wie eine eben so grosse von x".
„ (70) 30 „ 18 ist zu setzen $\frac{v''^2}{v'^2}$ anstatt $\frac{v''^2}{v'}$.
„ (71) 31 Gl. (12. b) fehlt im letzten Gliede des Radicanden der Factor v''^2.
„ (74) 34 „ (13. b) cos. ω statt cos a im ersten Gliede rechts, im dritten Gliede des Radicanden fehlt der Factor v''^2.
„ (76) 36 „ (2.) ist zu setzen $\zeta_0'^2$ anstatt ζ_0'.
„ (78) 38 Zeile 3 v. u. $\frac{\zeta_0'}{e}$ anstatt $\frac{\zeta_0}{e}$.
„ (79) 39 „ 7 „ „ ζ_0' cos. α' anstatt ζ_0 cos. α'

Seite (80) 40 Gl. (4.) ist zu setzen $1 - \frac{v'^2}{v^2} \sin^2 . i$ anstatt $1 - \frac{v''^2}{v^2} \sin^2 . i$

„ (83) 43 Zeile 2 in dem zu $\cos^2 . \omega$ gehörigen Factor: $\left(\frac{v'^2 + v''^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$ anstatt $\left(\frac{v'^2 + v''^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

„ (84) 44 ist an Zeile 12 beizufügen: Der durch die Gleichung (10. a) sich ergebende Phasenunterschied ist in Zeiteinheiten ausgedrückt, so dass, wenn $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ den Schwingungsbogen des einen Lichtantheils vorstellt, $\frac{2\pi}{\lambda}[v(t + \Theta) - x]$ der des andern Lichtantheils wird; es lässt sich aber dieser letztere Bogen auch auf die zwei andern Weisen schreiben: $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + v\Theta)$ und $2\pi\left(\frac{vt - x}{\lambda} + \frac{v\Theta}{\lambda}\right)$. In diesen geben $v\Theta$ und $\frac{v\Theta}{\lambda}$ immer wieder denselben Phasenunterschied, jedoch ersterer in Längeneinheiten und letzterer in Wellenlängen ausgesprochen an; man kann daher bei den zwei letzten Schreibweisen für $v\Theta$ und $\frac{v\Theta}{\lambda}$ auch blos Θ setzen, muss dann aber bei den verschiedenen Formen auf den Unterschied der Einheiten achten, die dem Phasenunterschied zum Grunde liegen.

„ (88) 48 Zeile 3 v. u. ist zu setzen: $90^\circ - \varphi_2$ anstatt $90^\circ - \varphi$.

„ (94) 54 Gl. (7. f) ist $\omega_1 + \mu - \Delta$ für $\omega_1 + \mu + \Delta$ zu schreiben.

„ (96) 56 Zeile 4 u. 7 ist rechts der Factor $1 + \cos . \omega \cot . a \sin . i$ beizufügen.

„ (98) 58 „ 11 v. u. $-\tan g . \psi$ anstatt $\pm \tan g . \psi$, $\sin a . \cos . i$ anstatt $\sin a \sin i$

„ „ „ „ 10 „ „ links $-\cot . \psi$ anstatt $\cot . \psi$, rechts $\frac{\sin a}{\sin . \omega}\cot . i$ anstatt $\frac{\sin . a}{\sin . \omega}$.

„ (106) 66 „ 1 „ „ hinter das Wort „ausüben" ist beizufügen „betrachtet".

„ (111) 71 „ 3 im Nenner unter der Wurzel: A^2 anstatt A.

„ (114) 74 und Seite (115) 75 ist „relle Axe" zu setzen, wo „grosse Axe" steht.

„ (118) 78 Zeile 10 setze $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$ anstatt $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$.

„ (124) 84 „ 10 setze $3v'v''^2$ anstatt $3v'v''$.

„ (129) 89 Gl. (1.) vor dem zweiten Gliede in der eckigen Klammer + anstatt —, im dritten Gliede $\sin^2 . \beta$ anstatt $\sin . 2\beta$.

„ (130) 90 „ (2. a) im dritten Gliede der eckigen Klammer $\sin . \beta$ anstatt $\sin^2 . \beta$, im vierten $\sin^2 . \beta$ anstatt $\sin . \beta$.

„ „ „ „ (2. b) Vorzeichen des letzten Glieds in der eckigen Klammer + anstatt —

„ „ „ „ (3 b) Vorzeichen ihrer rechten Seite + anstatt —.

„ „ „ „ (4. a) fehlt in dem Factor neben T das Glied $\frac{1}{v''} - \frac{1}{v'}$.

„ (131) 91 „ (4. b) Vorzeichen ihrer rechten Seite + anstatt —, Gl. (1.) $\sin^2 . \pi\eta$ anstatt $\cos^2 . \pi\eta$.

„ (132) 92 Zeile 11 ist ω_1 für ω zu setzen.

„ (136) 96 „ 1 soll Δ anstatt α stehen.

„ (141) 101 Zeile 1 u. 15, dann Seite (144) 104 ist λ anstatt v zu setzen, und hinter der Gleichung (1. a) Seite (141) 101 ist beizufügen: „wo in der Gleichung (10 a) der Ziffer VII. λ anstatt v genommen worden ist, um den Phasenunterschied in Wellenlängen zu erhalten.

Ausserdem ist Seite (131) 91 Zeile 14 u. 21 das Citat Gl. (6. c) abzuändern in Gl. (6 b), und Seite (116) 76, so wie Seite (119) 79 das „Gl. (1. d) der Ziffer X." in „ Gl. (10. b) der Ziffer VII." — Die Betrachtungen der Ziffer XVIII. lassen sich sehr abkürzen, wenn man erwägt, dass die Natur des in Ziffer VII. eingeführten Coordinatensystems keinen negativen Werth von ζ gestattet.

In Fig. 7 der Tafel sind die isochromatischen Curven nicht, wie sie sollten, Ellipsen geworden, und in Fig. 8 haben die geradlinigen Streifen nicht zu beiden Seiten farbige Säume erhalten, die sie, ähnlich wie die kreisförmigen, neben sich tragen.